Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen general de ecuaciones diferenciales ordinarias

Fecha 9 de enero de 2020

Instrucciones:

- **Duración:** 4 horas
- Cada problema vale 6 puntos y la calificación mínima aprobatoria de este examen son 18 puntos
- Favor de no poner más de un problema por hoja y poner su nombre en cada hoja.

Preguntas

1. Consider el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2+y^2)\sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \dot{y} = -x + y(x^2+y^2)\sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases} \tag{1}$$

   a) Determine los ciclos límite de (1)

   b) Explique la estabilidad de los ciclos límite y esboce algunos de ellos en el plano indicando trayectorias para ellos.

2. Dado el sistema de Floquet

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin(2t)x + (\cos(2t)-1)y \\ \dot{y} = (\cos(2t)+1)x + \sin(2t)y \end{cases} \tag{2}$$

   a) Encuentre la matriz fundamental del sistema

   b) Encuentre los multiplicadores de Floquet

   c) Enuncie el teorema que le permita determinar la estabilidad de la solución trivial

3. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 + y \\ \dot{y} = -y \end{cases} \tag{3}$$

   a) Demuestre que el flujo del sistema preserva el área en $\mathbb{R}^2$.

   b) Demuestre que el origen es el único punto de equilibrio del sistema.

   c) Encuentre la linealización del sistema alrededor del punto de equilibrio y encuentre los espacios estables e inestables.

   d) Encuentre explicitamente el flujo del sistema.

   e) Encuentre explicitamente las variedades estable e inestable del origen.

4. Considere el siguiente sistema en $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \dot{x} = -xy^2 \ \dot{y} = 2x^2y \right. \tag{4}$$

a) Determine el valor de la constante A tal que

$$H(x, y) = x^2 + Ay^2$$

sea una integral primera del sistema.

b) Demuestre que el flujo del sistema preserva el área en $\mathbb{R}^2$

c) Demuestre que el origen es un punto de equilibrio estable del sistema

d) Demuestre flujo no preserva el área en $\mathbb{R}^2$