Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen general de ecuaciones diferenciales parciales

Fecha 9 de enero de 2020

Instrucciones:

- **Duración:** 4 horas
- Cada problema vale 6 puntos y la calificación mínima aprobatoria de este examen son 18 puntos
- Favor de no poner más de un problema por hoja y poner su nombre en cada hoja.

Preguntas

1. Ecuación de onda con disipación.
   Considere
   $$\begin{cases} u_{tt}(\mathbf{x},t) + ku_t(\mathbf{x},t) - c^2\Delta u(\mathbf{x},t) = 0 & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u(\mathbf{x},0)=0, u_t(\mathbf{x},0)=g(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{1}$$
   (a) Encuentre $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que
   $$v(\mathbf{x},t)=e^{\alpha t}u(\mathbf{x},t)$$
   sea solución de una ecuación sin término de primer orden en $\mathbb{R}^2\times\{t\geq 0\}$.

   (b) Encuentre $\beta\in\mathbb{R}$ tal que
   $$w(x_1,x_2,x_3,t)=w(\mathbf{x},x_3,t)=e^{\beta x_3}v(\mathbf{x},t)$$
   sea solución de una ecuación que contiene únicamente términos de segundo orden.

   (c) Encuentre una fórmula de solución para el problema original (**??**).

2. Se dice que una función $u\in C^2(\Omega)$, con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ es *subarmónica* en Ω si
   $$-\Delta u\leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$
   Demuestre que:

   (a) Si u es subarmónica entonces para toda bola $B_R(x_0)\subset\Omega$,
   $$u(x_0)\leq\frac{d}{\omega_d R^d}\int_{B_R(x_0)}u(y)\,dy \qquad \text{y,} \qquad u(x_0)\leq\frac{1}{\omega_d R^{d-1}}\int_{\partial B_R(x_0)}u(y)\,dS(y).$$

   (b) Si $u\in C(\bar{\Omega})$ es subarmónica entonces el máximo de u se alcanza en $\partial\Omega$.

   (c) Si u es armónica en Ω entonces u^2 es subarmónica en Ω.

   (d) Sea u subarmónica en Ω y : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^∞. ¿Bajo qué condiciones es $F\circ u$ subarmónica?

3. Sea la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2}$$

con condición inicial $u(x,0) = g(x)$.

(a) Demuestre que una solución u está determinada implícitamente por la relación $u = g(x - ut)$. (Utilice el método de características.)

(b) Calcule el tiempo de formación de singularidades (ondas de choque) para el caso en que

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$

4. Sea $Q = (0,1) \times (0,\infty)$ y $u \in C^2(Q) \cup C(\overline{Q})$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) = 0 & (x,t) \in Q \\ u(x,0) = \cos(\pi/2x), & x \in (0,1) \\ u(0,t) = 1 - 2te^{1-t},\ u(1,t) = 1 - \sin(\pi t) & t > 0 \end{cases}$$

Demuestre que $0 \le u(x,t) < 3$ para todo $(x,t) \in Q$