Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2023-I.
17 de enero de 2023.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Teoría de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si p es un primo que divide al orden del grupo G, entonces existe un elemento en G de orden p.

2. Demuestra lo siguiente:
   (a) El único subgrupo de índice dos en el grupo simétrico $\mathfrak{S}_4$ es el grupo alternante $\mathfrak{A}_4$.
   Sea G un grupo con 12 elementos y P un 3-subgrupo de Sylow de G:
   (b) Si P no es normal en G entonces G es isomorfo al grupo alternante $\mathfrak{A}_4$.
   (c) Si P es normal en G, entonces G es isomorfo a un producto semidirecto $P \rtimes_{\varphi} H$ para un 2-subgrupo de Sylow H de G.

3. Sea G un grupo de orden 30.
   (a) Demuestra que G tiene un subgrupo de orden 15.
   (b) Si G no es abeliano, demuestra que G tiene más de un 2-subgrupo de Sylow.

4. Sea p un primo impar. Demuestra que un grupo G de orden $2p$ es cíclico o es diédrico.

5. Demuestra que si N es un subgrupo normal del grupo G tal que, tanto N como ${}^{G}/_{N}$ son grupos solubles, entonces G es soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sean p un primo y $R = \{{}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b\}$. Demuestra que R es un anillo de ideales principales y describe sus unidades.

2. Sean E una extensión del campo F, $\alpha \in E$ algebraico sobre F y $f(x) \in F[x]$ el polinomio irreducible de α. Demuestra que si $f(x)$ es de grado impar entonces $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.

3. Sea $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$.
(a) Explica por qué la extensión de campos $\mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{Q}$ no es una extensión de Galois.
(b) Encuentra una extensión de Galois mínima $K \supset \mathbb{Q}$ que tenga a $\mathbb{Q}(\alpha)$ como campo intermedio.
(c) Determina el grupo de Galois $Gal(K, \mathbb{Q})$.

4. Sean $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ y E su campo de descomposición. Demuestra que el grupo de Galois de E sobre $\mathbb{Q}$ es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5. Demuestra que para todo primo p y todo natural distinto de cero n, existe un único campo (hasta isomorfismo) con p^n elementos.