Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2023-I.
17 de enero de 2023.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Cada uno de los seis ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

En lo que sigue, usaremos la siguiente notación:

- A es un anillo conmutativo con elemento unitario e I es un ideal de A;
- $nil(A) = \{a \in A \mid a \text{ es nilpotente}\}$;
- $J(A)$ es la intersección de todos los ideales maximales de A (el radical de Jacobson);
- $\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ para alguna } n > 0\}$;
- $Spec(A) = \{P \subset A \mid P \text{ es un ideal primo}\}$ dotado de la topología de Zariski.

1. Demuestra que $nil(A)$ es la intersección de todos los ideales primos de A. Deduce de este hecho que $\sqrt{I} = I$ si y sólo si I es una intersección de ideales primos.
2. Muestra que $Spec(A)$ es irreducible si y sólo si $nil(A)$ es un ideal primo.
3. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Supongamos que $I \subseteq J(A)$ y que N es finitamente generado. Demuestra que si el morfismo inducido $\bar{f} : M/IM \longrightarrow N/IN$ es suprayectivo, entonces f es suprayectivo.
4. Sea M un A-módulo tal que la localización $M_{\mathfrak{M}} = 0$ para todos los ideales maximales $\mathfrak{M}$ que contienen a I. Demuestra que $M = IM$.
5. Demuestra que en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x]$, el ideal $\mathfrak{M} = (2, x)$ es maximal y el ideal $I = (4, x)$ es $\mathfrak{M}$-primario pero no es una potencia de $\mathfrak{M}$.
6. Sea B un subanillo de A tal que $A \setminus B$ es cerrado bajo multiplicación. Demuestra que B coincide con su cerradura entera en A.