Examen de Conocimientos Generales

Análisis Numérico

Semestre 2023-1

Enero 2023

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios explicando con detalle su procedimiento.
Calificación: Suma de puntos dividida por 3. Requiere al menos 18 puntos para aprobar.
Duración: 4 horas.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Las computadoras usan un sistema binario de precisión finita para representar números y realizar cálculos. Algunos números enteros no pueden representarse exactamente con ese sistema.

a) (2 puntos) Describa un algoritmo para convertir un número entero en base decimal a base binaria. *Sugerencia:* use el algoritmo de división.

b) (2 puntos) Sea $\mathcal{F}$ un sistema binario con precisión siete. Encuentre el primer entero positivo N que no pueda representarse exactamente en $\mathcal{F}$.

c) (2 puntos) Encuentre el número positivo más grande $x \in \mathcal{F}$ tal que

$$x \oplus 1 = x.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ con $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. Denotamos por I_3 a la matriz identidad 3×3.

a) (2 puntos) Pruebe que la matriz $A = I_3 + \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ es positiva definida.

b) (3 puntos) De una fórmula explícita para el factor de Cholesky de A en términos de las componentes del vector $\boldsymbol{u}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Considere los puntos dados por la siguiente tabla:

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	2	2	5

Tabla 1

a) (2 puntos) Halle el polinomio cúbico P_3 que pasa por los puntos de la Tabla 1. Exprese P_3 en la forma de Newton.

b) (3 puntos) Halle el spline cúbico natural S que pasa por los puntos de Tabla 1.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (4 puntos) Determine coeficientes a, b, c y α de modo que la regla de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2 dx \approx af(-\alpha) + bf(0) + cf(\alpha),$$

sea exacta para todos los polinomios con el grado más alto posible.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *Teorema de la Contracción.* Sea ϕ una función continua de valores reales sobre el intervalo $[a, b]$. Sea $x_0 \in [a, b]$. Supónga que ϕ es una contracción en

$$B(x_0, r) = \{x \in [a, b] : |x - x_0| < r\},$$

esto es, para cualquier pareja de puntos $s, t \in B(x_0, r)$ se cumple que:

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq L|s - t|, \quad 0 \leq L < 1.$$

Considere la iteración:

$$x_{n+1} = \phi(x_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Supónga que:

$$|x_0 - x_1| \leq (1 - L)r.$$

a) (3 puntos) Pruebe que la sucesión $\{x_n\}$ converge en la cerradura de $B(x_0, r)$.

b) (3 puntos) Sea x^* el límite de la sucesión $\{x_n\}$. Pruebe la siguiente estimación del error:

$$|x_n - x^*| \leq |x_1 - x_0| \frac{L^n}{1 - L}.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Deseamos determinar coeficientes a y b de modo que la función racional

$$\varphi_{a,b}(x) = \frac{ax}{b + x}, \quad x \neq -b,$$

sea la mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados para los puntos (x_i, v_i), $i = 0, \ldots, 7$ que se muestran en Fig. 1. Sea

$$S_(a, b) = \sum_{i=0}^{7} (v_i - \varphi_{a,b}(x_i))^2.$$

El problema de mínimos cuadrados correspondiente es:

$$\min_{a,b} S(a, b).$$

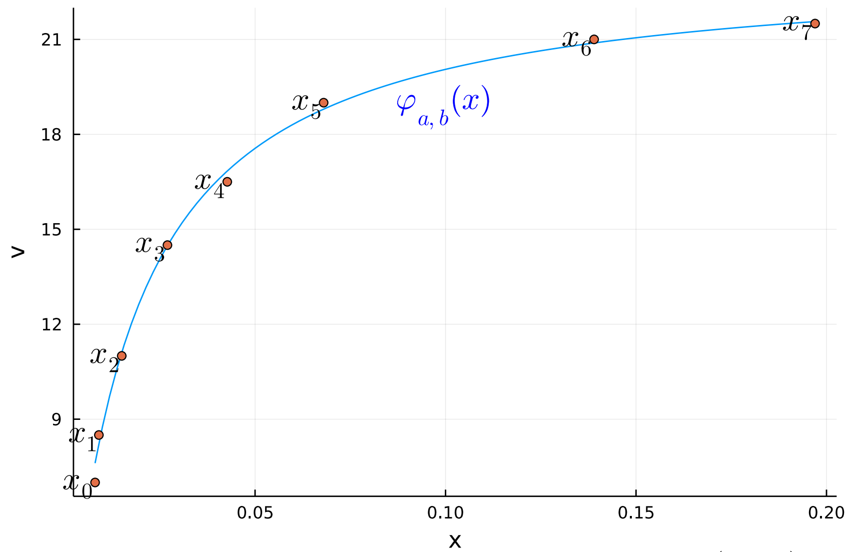

Figura 1: Ajuste de mínimos cuadrados $\varphi_{a,b}$ para los puntos (x_i, v_i), $i = 0, \ldots, 7$.

a) (2 puntos) Halle las ecuaciones en los coeficientes a y b que debe cumplir la solución de mínimos cuadrados.

b) (2 puntos) El problema de mínimos cuadrados se puede reducir a un sistema de ecuaciones lineales. Para ello la función objetivo S se reemplaza por:

$$P(a, b) = \sum_{i=0}^{7} (v_i(b + x_i) - a x_i).$$

Halle el sistema de ecuaciones lineales en los coeficientes a y b que debe satisfacer la solución de mínimos cuadrados correspondiente.