POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Complejo

Enero del 2023
Semestre 2023-1

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos,
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

---

1. (6 puntos) Sea $a \in D = \{z \ : \ |z| < 1\}$. Prueba que $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$ si y solo si $|z| < 1$.

2. (6 puntos) Calcula las siguientes integrales

   a)
   $$\int_{|z-i|=3} e^{\operatorname{sen}(z)} dz$$

   b)
   $$\int_{|z-i|=3} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} dz$$

   c)
   $$\int_{|z-i|=3} \frac{1}{(z+1)z} dz$$

3. (6 puntos) Sea D el disco unitario abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa y que no se anula.

   a) Prueba que existe $F : D \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F^2 = f$.

   b) Prueba que si f es inyectiva entonces F también es inyectiva y que $F(D)$ no contiene puntos antípodas ($-a$ es el antípodo de a).

   c) Usa lo anterior y el teorema de la aplicación abierta para probar que el interior de $\mathbb{C} \setminus F(D)$ es no vacío.

4. (6 puntos) Sea
$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \,,$$
donde la serie de potencias tiene un radio de convergencia R ($0 < R < \infty$). Prueba que la función
$$F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n!} z^k$$
es una función entera y que
$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) e^{z/\zeta}}{\zeta} d\zeta$$
donde γ es una circunferencia centrada en el origen de radio $r < R$ recorrida en el sentido positivo.

5. (6 puntos) Demostrar que para $r > 0$, tan pequeño como se quiera, todos los ceros de la función
$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n! z^n} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,,$$
están en el disco $|z| < r$ para n suficientemente grande.

6. (6 puntos) Supongamos que f y g son funciones enteras tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Prueba que existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.