



POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

Enero del 2023
Semestre 2023-1

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
 - El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.
-

1. (6 puntos) Mostrar que un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si su espacio dual X' lo es.
2. (6 puntos) Demuestre que la convergencia débil implica convergencia débil estrella. Además, pruebe que el regreso es cierto si X es reflexivo.
3. (6 puntos) Pruebe que el conjunto de los valores propios de un operador lineal compacto $T : X \rightarrow X$ sobre un espacio normado X es numerable, y que el único punto de acumulación posible es $\lambda = 0$.

4. (6 puntos) Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y \mathcal{M} un subespacio de \mathcal{H} . Sea $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado con norma C .

Prueba que existe una única extensión lineal acotada de F a todo \mathcal{H} con la misma norma C .

5. (6 puntos) Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador acotado y autoadjunto. Prueba que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

6. (6 puntos) Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal acotado y normal. Demuestra que $\lambda \in \mathbb{C}$ pertenece al conjunto resolvente $\rho(T)$ si y solo si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$

$$\|T_\lambda x\| \geq c\|x\| \quad \text{con} \quad T_\lambda = T - \lambda I$$