POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Real

Enero del 2023
Semestre 2023-1

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

---

1. (6 puntos) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que la medida μ tiene la **propiedad de continuidad** si para toda sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ tal que $A_n \uparrow A$, es decir $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, ó $A_n \downarrow A$, es decir, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ y $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$, se tiene que $\text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

   Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ el espacio de medida donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel y λ es la medida de Lebesgue. Demuestra que λ tiene la propiedad de continuidad ó da un contraejemplo para ver que no la tiene.

2. (6 puntos)

   Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, (Y, Σ') un espacio medible y $T : X \to Y$ una función medible. Para cada $A \subseteq Y$ denotamos a la imagen inversa de A bajo T como $T^{[-1]}(A) := \{x \in X \,|\, T(x) \in A\}$. Define

   $$(\mu \circ T^{[-1]}) : \Sigma' \to [0, \infty],$$

   tal que $(\mu \circ T^{[-1]})(A) = \mu(T^{[-1]}(A))$.

   a) Demuestra que $(\mu \circ T^{[-1]})$ es una medida en (Y, Σ'), llamada **la medida imagen bajo** T.

   b) Sea $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{B_i}(y)$, donde n es un entero positivo, $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subset [0, \infty)$ son número distintos y $\{B_i\}_{i=1}^{n} \subset \Sigma'$ es una partición medible de Y, es decir los conjuntos B_i no son vacios, son disjuntos y $\cup_{i=1}^{n} B_i = Y$. Aquí 1_{B_i} es la función indicadora o característica de B_i.

   Demuestra que f es una función medible de (Y, Σ') en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, (donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota los Borelianos) y demuestra que

   $$\int_Y f d(\mu \circ T^{[-1]}) = \int_X (f \circ T) d\mu.$$

3. (6 puntos)

   Sean $\{f_n\}_{n\geq 1}$, f y g funciones medibles en un espacio de medida (X, Σ, μ).

   a) Supón que $f_n \to f$ c.d. relativo a μ y $f_n \to g$ c.d. relativo a μ. Demuestra que $f = g$ c.d. relativo a μ.

   b) Supón que $\{f_n\}_{n\geq 1}$, f y g pertenecen a $L^1(X, \Sigma, \mu)$ y que además $f_n \to f$ en L^1 y $f_n \to g$ en L^1. Demuestra aque $f = g$ c.d. relativo a μ.

4. (6 puntos)

   Sea $([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ el espacio de medida donde $\mathcal{L}$ es la σ-álgebra de los Lebesgue medibles de $[0,1]$ y λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$.

   a) Sea $\{f_n\} \subseteq L^1([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ una sucesión tal que $f_n(x) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ en medida y $\int_{[0,1]} f_n d\lambda \to \int_{[0,1]} f d\lambda$.

   Prueba que para todo $E \in \mathcal{L}$ se tiene que $\int_E f_n d\lambda \to \int_E f d\lambda$.

   b) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles. Prueba que $f_n \to 0$ en medida si y solo si $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\lambda = 0$.

5. (6 puntos)

   a) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue medible tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Sea $E_n = \{x \in [0,1] : n-1 \leq f(x) < n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea λ la medidad de Lebesgue sobre $[0,1]$.

   Prueba que $f \in L^1([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$ si y solo si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\lambda(E_n) < \infty$.

   b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prueba que

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{1/n} = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

6. (6 puntos)

   Sea $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $K(x) \geq 0$ para todo x, $K \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$.

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

   Prueba que para todo $h, x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)K(\frac{y}{h})dy$ tiene sentido y

   $$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)K\left(\frac{y}{h}\right) dy = f(x).$$