Exámen: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Noviembre de 2022

Resuelva 3 de los siguientes 4 problemas. Duración: 3 horas.

1. Demuestre que el esquema de Engquist-Osher, el de Godunov y el esquema upwind coinciden cuando se aplican al problema lineal
$$u_t + \alpha u_x = 0,$$
donde α es una constante positiva.

2. El esquema de Roe para una ley hiperbólica de conservación escalar con flujo convexo esta dado por
$$\bar{w}_j^{n+1} = \bar{w}_j^n - \lambda\left[f(w_R^*(0;\bar{w}_j^n,\bar{w}_{j+1}^n)) - f(w_R^*(0;\bar{w}_{j-1}^n,\bar{w}_j^n))\right]. \tag{1}$$
Explique qué significa y cómo se deriva el esquema anterior.

3. Demuestre que el método
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \begin{cases} \Delta t\Delta_+ f(u_j^n) & \text{if } f'(u_j^n) < 0 \\ \Delta t\Delta_- f(u_j^n) & \text{if } f'(u_j^n) > 0 \end{cases}$$
donde $\Delta_+ u_j = (u_{j+1} - u_j)$; $\Delta_- u_j = \Delta_+ u_{j-1}$. No es conservativo.

4. Considere la ecuación dada por
$$u_t + au_x = u^2 \tag{2}$$
donde a es una constante positiva, con condiciones iniciales
$$u(x,0) = \cos(x) \tag{3}$$
definida en el dominio no acotado $t = 0$.

   (a) Obtenga la solución de forma explicita.

   (b) Determine donde se forman singularidades y cuál es el tiempo mínimo para que esto ocurra.

   (c) Explique cual es la diferencia entre las singularidades de este problema y aquellas que se forman para un problema de Cauchy correspondiente a una ecuación cuasi-linal homogénea de primer orden.