Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2023-1

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 50 puntos.

1. (10 puntos) Describa el retrato fase de la ecuación $x'' = x^4 - x^2$, donde $' = d/dt$. La trayectoria que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1/2, x'(0) = 0$, ¿es periódica?

2. (10 puntos) Demuestre que las trayectorias del sistema Hamiltoniano, $\ddot{x} + g(x) = 0$ (aquí $\ddot{x} = d^2x/dt^2$), donde g es una función estrictamente creciente que satisface

$$\int_0^x g(u)du \to \infty, \quad \text{si} \quad x \to \pm\infty,$$

son periódicas.

3. (10 puntos) Sea la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u^3 + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Demuestre que existen soluciones de onda viajera de la forma $u(x, t) = U(x - ct)$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$, donde $U = U(\phi)$ satisface

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} + (\alpha - \gamma c)\frac{dU}{d\phi} + \beta U^3 = 0.$$

4. (10 puntos) La interacción entre dos especies está dada por el sistema

$$\dot{x} = (a_1 - b_1 x - c_1 y)x, \quad \dot{y} = (-a_2 + c_2 x)y,$$

donde $x = x(t)$ es la población huésped, $y = y(t)$ la del parásito, para todo tiempo $t > 0$, y los parámetros a_j, b_j, c_j son positivos. Analice la dinámica del sistema si $a_1c_2 - b_1a_2 > 0$.

5. (10 puntos) Encuentre el intervalo máximo de existencia (α, ω) de la solución del problema

$$\dot{x_1} = x_1^2, \quad \dot{x_2} = x_2 + x_1^{-1}, \qquad x_1(0) = 1,\, x_2(0) = 1.$$

Analice los límites de la solución cuando $t \to \alpha^+$ y $t \to \omega^-$.

6. (10 puntos) Analice el retrato fase del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)^2, \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2)^2. \end{aligned}$$

7. (10 puntos) Aplique el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(r^4 - 3r^2 + 1), \\ \dot{y} &= x + y(r^4 - 3r^2 + 1), \end{aligned}$$

con $r^2 = x^2 + y^2$, tiene un ciclo límite en la región $R = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < \|\boldsymbol{x}\| < 2\}$.