**Posgrado en Ciencias Matemáticas**
**Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales**
Semestre 2023-1

**Instrucciones:**

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

**1.** (20 puntos) Aplique el método de características para calcular la solución al siguiente problema de Cauchy:

$$u_x + u_y + u = 1,$$
$$u(x, x^2 + x) = \sin x, \quad x > 0.$$

Haga un dibujo de las curvas características en el plano y encuentre la solución explícita. ¿Cuál es el dominio de definición de la solución? ¿Es única la solución? Explique su respuesta.

**2.** (20 puntos) Encuentre la única solución entrópica (para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$) al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

¿Porqué es la solución encontrada una solución entrópica? ¿Porqué es la única solución entrópica? Explique sus respuestas.

**3.** (20 puntos) Aplique la fórmula de Poisson para encontrar la solución al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0 \\ u(x,y,0) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,y,0) = x^2 + y^2, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

donde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Verifique que la fórmula obtenida es, efectivamente, una solución al problema. Describa en qué consiste el principio fuerte de Huygens. La solución encontrada, ¿satisface este principio? Explique tus respuestas.

**4.** (20 puntos) Sea $u$ una solución de clase $C^2$ del siguiente problema exterior

$$\Delta u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^n \backslash B_R,$$
$$u = 0, \quad \text{sobre } \partial B_R,$$

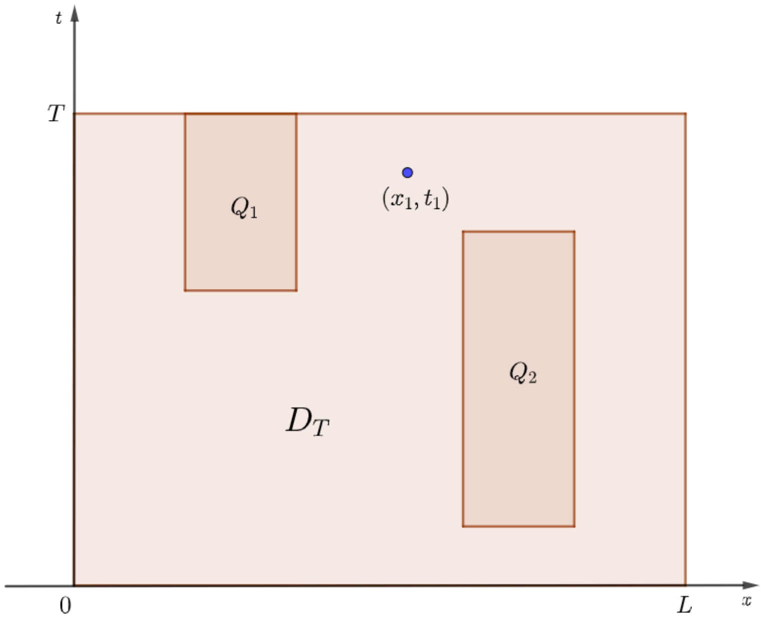


Figura 1: Dominio plano $D_T = Q_T \setminus \big(\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2}\big)$, $Q_T = (0, L) \times (0, T)$.

donde $B_R$ es la bola abierta de radio $R > 0$. Demuestre que $u \equiv 0$ si

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{\ln|x|} = 0, \quad \text{para } \ n = 2,$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \quad \text{para } \ n \geq 3.$$

**5.** (20 puntos) Suponga que $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$, $u = u(x,t)$, es una solución de la ecuación del calor $u_t - u_{xx} = 0$ en el dominio plano $D_T = Q_T \setminus \big(\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2}\big)$, $Q_T = (0, L) \times (0, T)$, donde los rectángulos $Q_1$ y $Q_2$ se aprecian en la figura 1. Suponiendo que $u$ alcanza su valor máximo

$$M := \max_{\overline{D_T}} u,$$

en el punto interior $(x_1, t_1) \in D_T$, ¿en qué otros puntos $(x, t) \in D_T$ se cumple que $u(x,t) \equiv M$? Explique su respuesta. (Nota: Aquí $u \in C^{2,1}(D)$ significa que $u$ es continua en un dominio $D$, con primera y segunda derivada continuas con respecto a $x$ y primera derivada continua con respecto a la variable $t$.)