Examen General de Estadística

Semestre 2023-1 (Enero 2023)

Instrucciones: Deberá responder todas las preguntas justificando sus respuestas.
Se requieren 4/6 puntos para aprobar el examen.
Tiempo máximo de examen: 5 horas (9:00-14:00 hrs.).

Inferencia Estadística

Instrucciones: Justifica tus respuestas con los procedimientos correspondientes.

1. (*Método delta univariado*) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de $X \sim f(x|\theta)$, en donde $\theta \in \mathbb{R}$. El interés radica en estimar $\eta = h(\theta)$, en donde $h'(\theta)$ existe, es una función continua y es distinta de cero para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Asumiendo que se cumplen las *condiciones de regularidad* y que se sabe que

- $\widehat{\theta}_n$ es el EMV de θ.
- $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$.
- $\dfrac{\widehat{\theta}_n - \theta}{se(\widehat{\theta}_n)} \xrightarrow{D} N(0,1)$, con $se(\widehat{\theta}_n) = \sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n)}$.

Demuestra que

$$\frac{(\widehat{\eta}_n - \eta)}{se(\widehat{\eta}_n)} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

en donde $se(\widehat{\eta}_n) = |h'(\widehat{\theta}_n)| se(\widehat{\theta}_n)$. [Valor: 3 puntos]

2. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de

$$f(x|\theta) = \exp\{-(x-\theta)\} \mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x), \quad \text{con } -\infty < \theta < \infty.$$

1. Encuentra el EMV $\widehat{\theta}_n$ para θ. [1 punto]
2. El EMV $\widehat{\theta}_n$, ¿es consistente? [1.5 puntos]
3. El EMV $\widehat{\theta}_n$, ¿es insesgado? [1.5 puntos]

[Valor: 4 puntos]

3. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de $f(x|\theta)$ en donde θ es un vector de dimensión k. El interés radica en estimar $\eta = h(\theta)$, en donde $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Describe el bootstrap paramétrico para obtener un intervalo del $(1-\alpha)\times 100\,\%$ de confianza para η. Asume que $\widehat{\theta}_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es el EMV de θ.

[Valor: 1 punto]

Inferencia Bayesiana

4. *Fundamentos*

Responde brevemente las siguientes preguntas.

(a) ¿Qué caracteriza al enfoque bayesiano de la inferencia estadística?

(b) ¿Cuáles son los cuatro *elementos básicos* de un problema de decisión en ambiente de incertidumbre?

(c) ¿Cómo se cuantifica la incertidumbre sobre los eventos relevantes en un problema de decisión? ¿Cómo se cuantifican las consecuencias de elegir una acción determinada?

(d) ¿Cuál es el *resultado fundamental* de la Teoría de Decisiones Bayesiana?

5. *Inferencia*

Tres prisioneros (A, B y C) esperan en celdas separadas. Dos de ellos serán ejecutados al amanecer del día siguiente y otro será perdonado.

(a) En ausencia de información adicional, ¿cuál es la probabilidad de que el prisionero A sea perdonado?

Supón ahora que el prisionero A le pregunta al guardia y que éste le confiesa que B es uno de los dos prisioneros que serán ejecutados. Supón también que el guardia siempre dice la verdad y que nunca le dice a un prisionero si es uno de los que serán ejecutados.

(b) Desde el punto de vista del prisionero A, ¿cuál es la nueva probabilidad de que sea él quien va a ser perdonado, dada la información proporcionada por el guardia?

(c) ¿Fue informativa para A la confesión del guardia?

Para resolver este problema, plantéalo como un problema de inferencia bayesiana, especificando los eventos relevantes, sus probabilidades (iniciales o condicionales) y calculando la probabilidad final requerida a través de la regla de Bayes.

6. *Problemas de decisión estadísticos*

Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una distribución Normal con función de densidad

$$p(x|\mu, \sigma^2) = N(x|\mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

donde la media μ es desconocida y la varianza σ^2 es conocida.

(a) Calcula la discrepancia logarítmica $\delta_\mu(\hat{\mu}, \mu)$ entre $p(x|\mu, \sigma^2)$ y $p(x|\hat{\mu}, \sigma^2)$.

Recuerda que, si se utiliza una distribución inicial conjugada para μ, entonces la distribución final correspondiente está dada por $p(\mu|\boldsymbol{x}) = N(\mu|m_x, \sigma^2/n_x)$ para algunos valores de m_x y n_x.

(b) Encuentra el estimador bayesiano óptimo de μ cuando se utiliza la función de pérdida $L_d(\hat{\mu}, \mu) = \delta_\mu(\hat{\mu}, \mu)$.

(c) Encuentra el estimador bayesiano óptimo de μ cuando se utiliza la función de pérdida cuadrática $L_c(\hat{\mu}, \mu) = (\hat{\mu} - \mu)^2$.

Supón ahora que se desea estimar $\phi = \exp(\mu)$ en lugar de μ.

(d) Encuentra la discrepancia logarítmica $\delta_\phi(\hat{\phi}, \phi)$ entre $p(x|\log(\phi), \sigma^2)$ y $p(x|\log(\hat{\phi}), \sigma^2)$.

(e) Encuentra el estimador bayesiano óptimo de ϕ cuando se utiliza la función de pérdida $L_d(\hat{\phi}, \phi) = \delta_\phi(\hat{\phi}, \phi)$.

(f) Encuentra el estimador bayesiano óptimo de ϕ cuando se utiliza la función de pérdida cuadrática $L_c(\hat{\phi}, \phi) = (\hat{\phi} - \phi)^2$.

(g) Comparando los resultados de los incisos (b) y (c) con los de los incisos (e) y (f) respectivamente, ¿qué puedes decir de los estimadores obtenidos con cada una de las funciones de pérdida L_d y L_c?