Examen General de Finanzas Matemáticas

de enero 2023
Duración: 11:00-15:00 hrs

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto.

1. Cuales de los siguientes modelos son libres de arbitraje?. En su caso, describir las medidas martingalas equivalente. En su caso, encontrar una oportunidad de arbitraje.

   a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, r = 1/9$, un activo con riesgo $\pi^1 = 5, S^1(\omega_1) = 20/3, S^1(\omega_2) = 49/9$.

   b) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, r = 1/9$, un activo con riesgo $\pi^1 = 5, S^1(\omega_1) = 20/3, S^1(\omega_2) = 49/9, S^1(\omega_3) = 10/3$.

2. Definir el modelo binomial, o modelo CRR. Sea $A_t = \sum_{i=0}^{t} S_i$ y $\bar{S}_t = \frac{1}{t} A_t$. Demostrar que el valor de proceso de una opción asiática $f(\bar{S}_?T)$ depende de t, S_t y A_t y encontrar una expresión a dicha función.

Teoría del Riesgo.

3. En el problema de la ruina clásico descrito por un caminante aleatorio obtener la probabilidad de ruina por dos métodos, primero usando análisis de primer paso y después usando propiedades de martingalas.

4. Una aseguradora encuentra que en cierto grupo de conductores asegurados, la tasa de accidentes en cada periodo de 24 horas aumenta de la media noche a medio día y posteriormente disminuye hasta la siguiente media noche. La aseguradora decide que el número de accidentes puede ser modelado por un proceso Poisson no homógeno cuya intensidad al tiempo t está dada por $1/6 - (12 - t)^2/1152$, en donde t es el número de horas transcurridas a partir de la media noche.

   a) Encontrar el número esperado de accidentes diarios.

   b) Hallar la probabilidad de que haya exactamente un accidente entre las 6 a.m. y 6 p.m..

Finanzas a tiempo continuo.

5. Una opción *digital* es una opción europea de pay-off $\mathbf{1}_{S_T > K}$.

a) Determinar el precio de arbitraje en el modelo de Black-Scholes de tal opción.

b) Calcular el delta de una opción digital.

6. Considerar el modelo HJM donde el precio de un cero-cupón está representado por

$$dB(t,T) = B(t,T)(r_t dt + \sigma(t,T)d\hat{W}_t. \quad B(T,T) = 1,$$

donde $\hat{W}$ es un movimiento browniano bajo la probabilidad riesgo-neutro $\mathbb{Q}$ y σ es la volatilidad local, posiblemente aleatoria y adaptada.

a) Mostrar que

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \exp\left[\int_0^t (\sigma(s,T) - \sigma(s,t))d\hat{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma(s,T)^2 - \sigma(s,t)^2)ds\right].$$

b) Deducir de lo anterior que si $f(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$ denota la tasa spot forward y $r_t = f(t,t)$ denota la tasa spot, entonces se tiene que

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\Sigma(s,t)ds - \int_0^t \Sigma(s,t)d\hat{W}_s$$

donde $\Sigma(s,t) = \frac{\partial\sigma(s,t)}{\partial t}$.