

---

# Fundamentos de Combinatoria 2023-1

## Examen general

Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM

### Indicaciones

- Para aprobar el examen se requieren 8 puntos.

### Problemas

1. (1 pt) Demuestra que para cualquier entero  $n \geq 0$  se cumple que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2. (2 pts) Demuestra que si existe un sistema de Steiner  $(2, 3, n)$ , entonces  $n$  debe ser congruente con 1 o con 3 módulo 6.
3. (2 pts) Resuelve los siguientes dos incisos:

- Encuentra, de manera explícita, todos los cuadrados latinos de orden 3 que usan los símbolos 1, 2, 3.
- Encuentra, de manera explícita, todas las clases de isotopía de cuadrados latinos de orden 4 que usan los símbolos 1, 2, 3, 4.

4. (3 pts) Demuestra que para  $n \geq 0$  los números de Bell satisfacen

$$b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}.$$

5. (1 pt) Considera el orden parcial en el conjunto  $X = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$  dado por la relación de divisibilidad, es decir, en el cual  $a \leq b$  si y sólo si  $a$  divide a  $b$ .
- Encuentra una cadena maximal y una anticadena maximal.
  - Encuentra una partición de  $X$  en la mínima cantidad posible de cadenas, y una partición en la mínima cantidad posible de anticadenas.

- 
6. (2 pts) Decimos que una permutación  $\pi$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  evita a 123 si no existen tres números  $i < j < k$  tales que  $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$ . Para cada  $n$ , ¿cuántas permutaciones de  $n$  elementos evitan a 123? Haz casos pequeños para conjeturar una fórmula en términos de los números de Catalán y demuéstrala.
7. (2 pts) ¿De cuántas formas es posible colocar números no necesariamente distintos del 1 al  $n$  en los vértices de un hexágono de manera que para cada lado del hexágono los dos números que se pongan en ese lado tengan suma par? Dos acomodos se consideran el mismo si se puede llegar de uno al otro mediante rotaciones o reflexiones.
8. (3 pts) Demuestra la desigualdad de Fisher para diseños de bloques. Es decir, demuestra que si se tiene un  $(v, k, \lambda)$ -diseño de bloques, que consiste de  $b$  bloques, entonces  $b \geq v$ .