Examen General de Geometría Algebraica 2023-1.

(18 de enero 2023)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0. El espacio afín será denotado por $\mathbb{A}$ y el proyectivo por $\mathbb{P}$.

1. Sea $\mathcal{I}$ el ideal de $K[x,y,z]$ generado por $\{xy^2 - x^4, xz(z-3)(y-1)\}$ y sea $\mathbb{W}$ el conjunto de ceros de $\mathcal{I}$ en $\mathbb{A}^3$. Calcúlese:
   (a) la descomposición de $\mathbb{W}$ en componentes irreducibles
   (b) el espacio tangente de Zariski de $\mathbb{W}$ en los puntos $(0,0,0)$, $(-1,1,7)$ y $(0,0,3)$.

2. Considerar las siguientes curvas afines en $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{array}{rl} (i) & y^2 = x^6 - 1 \\ (ii) & y^2 = x^5 + 1. \end{array}$$

   (a) Demostrar que ambas son suaves pero que su cerradura en $\mathbb{P}^2$ es singular en $[0:1:0]$.
   (b) Mostrar que agregando un número finito de puntos, es posible proyectivizar ambas curvas afines de tal manera que el resultado sea una curva suave (sugerencia: utilizar la explosión).
   (c) ¿Cuántos puntos son suficientes en el inciso (i)? ¿Cuántos puntos bastan en el inciso (ii)?

3. Usando el campo de los números complejos, considere la siguiente superficie cuádrica en el 3-espacio proyectivo $Q = \{xw - yz = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
   (a) Demostrar que Q es doblemente reglada. Es decir, muestre que existen dos familias de líneas, ambas de dimensión 1, contenidas en Q.
   (b) Muestre que para todo $p \in Q$ existen dos únicas líneas l_1, l_2, distintas y contenidas en Q que pasan por p.

4. Sea C una curva proyectiva definida sobre un campo k, demuestre que existe un morfismo finito sobreyectivo de C a la línea proyectiva $\mathbb{P}^1$.

5. Sea f un morfismo de $\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{P}^m$ el cual no es constante. Demuestre que la imagen de f tiene dimensión igual a n.

6. Sean X, Y subvariedades cerradas de $\mathbb{P}^n$, tal que la codimensión de X es 1 y la dimensión de Y es mayor a cero. Demuestre que la intersección $X \cap Y$ no es vacía.

¡SUERTE!