# Examen General de Geometría Diferencial 2023-1.

(18 de enero 2023)

**Instrucciones:** El examen dura **4 horas**. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

1. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\pi(x,y) = xy$. Muestre que $\pi$ es suprayectiva y suave, y que para cada variedad suave $M$, un mapeo $F : \mathbb{R} \to M$ es suave si y sólo si $F \circ \pi$ es suave, pero $\pi$ no es una sumersión suave.

2. Si $M$ es una variedad suave y $S \subset M$ es una subvariedad encajada, podemos caracterizar para cualquier $p \in S$ a $T_pS$ como un subespacio de $T_pM$ del siguiente modo:

$$T_pS := \{v \in T_pM \mid vf = 0 \text{ siempre que } f \in C^\infty(M) \text{ y } f|_S = 0\}.$$

   Demuestre que esta caracterización es falsa si $S$ es únicamente una subvariedad inmersa. Justifique su respuesta.

3. Demuestre que existe un campo vectorial suave en $\mathbb{S}^2$ que se anula en exactamente un punto. Explique y justifique ampliamente.

4. Para cada entero $n \geq 1$, definamos el flujo en la esfera de dimensión impar $\mathbb{S}^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ dado por $\theta(t,z) = e^{it}z$. Muestre que el generador infinitesimal de $\theta$ es un campo vectorial definido en $\mathbb{S}^{2n-1}$ que no se anula.

5. Considere el semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$, con la métrica riemanniana cuya matriz $(g_{ij})$ está dada por

$$g_{11}(x,y) = g_{22}(x,y) = \frac{1}{y^4}$$
$$g_{12}(x,y) = g_{21}(x,y) = 0$$

   (a) Plantee las ecuaciones diferenciales que debe satisfacer una geodésica $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que pase por el punto $(x_0, y_0) = (0,1)$ cuando $t = 0$.

   (b) Si dicha geodésica además cumple que $\gamma'(0) = (0,1)$, ¿puede asegurarse que $x(t) = 0$ para toda $t$?

6. Considere la hipersuperficie $M \subset \mathbb{R}^4$ dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} + \frac{v^2}{d^2} = 1.$$

   ¿Cuál es la curvatura seccional asociada al plano $\Pi$ generado por los vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ en el punto $p = (0,0,0,d)$?

¡SUERTE!