Examen General de Medios Continuos

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver TRES de los cuatro problemas. Cada problema vale 5 puntos. Favor de indicar los problemas que está resolviendo.

1. Sea el sistema de dos partículas de masa m_1, $m_2 > 0$ en $\mathbf{R}^3$ que se describen por el lagrangiano
$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}|\dot{\mathbf{q}}_1|^2 + \frac{m_1}{2}|\dot{\mathbf{q}}_2|^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2,$$
donde $\mathbf{q_j} = [x_j, y_j, z_j]$, $j = 1, 2$, y $|\cdot|$ la norma euclidiana ($g > 0$ es una constante). Suponer además que el sistema satisface los contornos holonómicos.
$$|\mathbf{q}_1| = 1, \quad |\mathbf{q}_2| = 1, \quad \mathbf{q_1} = -\mathbf{q}_2, \tag{1}$$
   (a) Escribir el lagrangiano L de del sistema restringido según la teoría de contornos ideales, y las ecuaciones Euler-Lagrange correspondientes.
   (b) Indicar los momentos canónicos y escribir el Hamiltoniano del sistema restringido.
   (c) Indicar los equilibrios para los casos $m_1 = m_2$ y $m_1 \neq m_2$.

2. Considere el lagrangiano
$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\epsilon\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$
donde $F_{i,j}$ son las entradas de una matriz $n \times n$ real F y ϵ es un parámetro real.
   (a) Escriba el Hamiltoniano H del sistema para el caso en que F es simétrica. ¿Qué condiciones sobre F son necesarias para que H esté bien definido?
   (b) Sea F simétrica e invertible. Determine la estabilidad del origen. En particular especifique como ésta depende del signo de ϵ y de los valores propios de F.

3. Considere un sistema conservativo con un grado de libertad. Suponga que $S(E)$ es el área comprendida en el interior de una curva cerrada en el espacio de fases correspondiente al nivel de energía E. Mostrar que el período de oscilaciones en esta curva es igual a
$$T = \frac{dS}{dE}.$$

4. Un disco de radio R, ancho S y masa M esta sobre el suelo y resbala sobre el suelo sin fricción. El disco tiene acoplado una barra de longitud R, sus lados son de longitud T y tiene masa m, esta barra esta sujeta, en uno de sus extremos, al disco por medio de un pivote que esta a una distancia R del centro del disco y el otro extremo esta pegado a un punto fijo que esta a una altura R del suelo por medio de un pivote, como se ve en la figura. La gravedad actúa sobre la barra. También considere que el disco puede sobrepasar el escalón vertical.

   a) Determine las ecuaciones de movimiento del centro de masa del disco y de la barra.

   b) Encuentre el punto de equilibrio de este sistema de ecuaciones.

   c) Encuentre las frecuencias de oscilación alrededor del punto fijo estable.