EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2023-I, JUEVES 19 DE ENERO DE 2023

Duración: 6 horas
Instrucciones:
1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ una familia de eventos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \infty$. Suponga que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \cap E_k)}{\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)\right)^2} = 1.$$

Demuestre usando 1.1, 1.2 y 1.3 que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 1$.

1.1 Para cada $n \geq 1$ defina $Y_n = \sum_{j=1}^{n} 1_{E_j}$, sea $a_n = \mathbb{E}(Y_n)$ y encuentre su valor. Ver que si $\varepsilon > 0$ entonces

$$\mathbb{P}(\{|Y_n - a_n| \geq \varepsilon a_n\}) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_n)}{\varepsilon^2 a_n^2}. \tag{1}$$

Calcule el valor de $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_n)$.

1.2 Usando (1), ver que

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{|Y_n - a_n| \geq \varepsilon a_n\}) = 0. \tag{2}$$

Si $B_n = \{Y_n \leq a_n/2\}$ y $b_n = \mathbb{P}(B_n)$, concluir de (2) que

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{3}$$

1.3 Usando (3) ver que existe una subsucesión $\{n_j\}_{j\geq 1}$ tal que $0 \leq b_{n_j} < \frac{1}{2^j}$ para toda $j \geq 1$. Demostrar que $\sum_{j=1}^{\infty} b_{n_j} < \infty$ y usar Borel-Cantelli para concluir que

$$\mathbb{P}\left(\cup_{j=1}^{\infty} \cap_{l=j}^{\infty} B_{n_j}^c\right) = 1 \text{ y que } \sum_{k=1}^{\infty} 1_{E_k} = \infty \text{ con probabilidad } 1.$$

Problema 2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Pruebe que si X es integrable y $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$ entonces $X = 0$ casi seguramente.

Problema 3. Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$, X y Y variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Suponga que $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$ y $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} Y$. Demuestre que $X = Y$ $\mathbb{P}$-c.s..

3.2 Suponga que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ y $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$. Demuestre que $X = Y$ $\mathbb{P}$-c.s..

3.3 Suponga que $\{X_n\}_{n\geq 1}$, X y Y pertenecen a $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y que además $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$ y $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} Y$. Demuestre que $X = Y$ $\mathbb{P}$-c.s..

Problema 4. Sea X una variable aleatoria y ϕ su función característica. Pruebe que si ϕ es integrable respecto de la medida de Lebesgue, la función

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iux} \phi(u)\ du$$

(que juega un rol fundamental en la fórmula de inversión de Fourier) es continua y acotada.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una cadena de Markov a tiempo continuo, con $X_0 = 1$ y

$$Q = \left| \begin{array}{cccccc} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right|$$

Demuestre que $\mathbb{P}(X_t = n) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$. *Sugerencia: Resuelva las ecuaciones de Kolmogorov ó utilice el resolvente.*

Problema 6. Sean $\xi_1, \xi_2, \cdots$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p = 1 - q = 1 - \mathbb{P}(\xi_i = -1)$. Defina $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots \xi_n$ donde S_0 es una constante y $g(x) = ((1-p)/p)^x$.

6.1 Demuestre que $M_n = g(S_n)$ es una martingala.

6.2 Si definimos $V_y = \min\{n \geq 0 : S_n = y\}$ para $y \in \mathbb{Z}$ y $S_0 = x$, demuestre que para $a < x < b \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}_x(V_b < V_a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}.$$

Problema 7.

Diana tiene un restaurante que es inspeccionado de vez en cuando. Un inspector se aparece con la distribución de un proceso de renovación con tiempo interarribo Uniforme entre 1 y 2.5 años. Si el inspector encuentra que Diana no ha fumigado en más de un año, recibe una multa de 105 pesos. Diana usa la estrategia de fumigar exactamente un año después de que vino el inspector. Calcule, a tiempos largos, la multa que paga por año.

Problema 8. Sea $B = (B_t, t \geq 0)$ un movimiento browniano, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada y defina a $P_t f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $P_t f(x) = \mathbb{E}(f(x + B_t))$.

8.1 Pruebe que si f es continua entonces $\lim_{t\to 0} P_t f(x) = f(x)$.

8.2 Sea ahora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C_{2,b}$ (dos veces diferenciable con continuidad y con derivadas acotadas). Utilice la expansión de Taylor a orden 2 con la forma de Lagrange del residuo, en la forma

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)\, y + f''(x)\, \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}\, [f''(x+z) - f''(x)]$$

con z entre 0 y y (note que z depende de y). Pruebe que el tercer término es $o(y^2)$, para probar que

$$P_t f(x) = f(x) + \frac{t}{2} f''(x) + o(t)\,.$$

8.3 Bajo la hipótesis del inciso anterior, pruebe que

$$\left.\frac{\partial P_t f(x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2} f''(x)\,.$$