**Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM**
**Examen general: Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias**
**Enero 20, 2023**

Código (e.g. MAHV19760313)

______________________

**Instrucciones.** Tiene 3 horas para para entregar su examen a partir de la hora de inicio. Habrá un periodo de tiempo de lectura de preguntas antes de comenzar el trabajo para el examen. Entregue una sección de respuestas y adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. Tome en cuenta que tiene menos de tres horas para trabajar en su examen. En la esquina superior derecha de cada página, escriba sus iniciales comenzando por su nombre, seguidas de su fecha de nacimiento en 8 dígitos (e.g. MAHV19760313). Favor de no escribir en la tabla de la derecha. Entregue su examen ***en un solo archivo pdf*** cuyo nombre comience como en sus hojas de examen (e.g. MAHV19760313_snEDO.pdf). Los exámenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles no serán calificados.

| Problema | Max | Puntos |
|---|---|---|
| 1 | 30 | |
| 2 | 30 | |
| 3 | 50 | |
| 4 | 60 | |
| 5 | 50 | |
| Total: | 220 | |

## Preguntas

1. *Errores absoluto y relativo.* Considere una aproximación $x_A$ para una cantidad $x$,
   (a) (10 puntos) Defina el error absoluto y el error relativo.
   (b) (10 puntos) Defina una cota superior para el error relativo tal que $x_A$ tenga $m > 0$ dígitos significativos de precisión en relación a $x$.
   (c) (10 puntos) ¿Cuántos dígitos de precisión tiene $x_A = 22/7$ relativo a $\pi = 3.1415926535....$ Verifique su definición de precisión con la cota superior del inciso anterior.

2. *Error y resíduo.* Suponga que una función $\psi \in \mathcal{C}^{m+1}[a, b]$ . Suponga además que $P_n(u; u_0)$ es el polinomio de Taylor de grado $n$ asociado a $\psi$ alrededor de $u_0 \in [a, b]$.
   (a) (10 puntos) Calcule $P_n(u, u_0)$.
   (b) (10 puntos) Calcule el residuo $R_n(u) = \psi(u) - P_n(u; u_0)$ para $u \in [a, b]$.
   (c) (10 puntos) Aplique sus resultados para $\psi(u) = e^{-u}$ alrededor de $u_0 = 0$, con $n \geq 0$.

3. *Euler y Runge Kutta.* Considere un problema de valor inicial $\partial_t x = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$, para $t \in [t_0, b]$. Considere una discretización $t_0 < t_1 < ... < t_N \leq b$ y suponga que $t_n = t_0 + nh$, para alguna $h > 0$ y $n \in \{0, ..., N\}$.
   (a) (10 puntos) Describa el método de Euler (hacia enfrente) y defina el error de truncación para dicho método (Pista: considere el teorema de Taylor para aproximar la solución al sistema al rededor de un (cada) punto de la discretización).
   (b) (20 puntos) Describa los métodos de Runge-Kutta (RK) de orden 2 y de orden 4, y escriba pseudo código para describir una iteración en la que pueda calcular soluciones a una ecuación diferencial con Euler, RK2 ó RK4.
   (c) (10 puntos) Compare la diferencia entre las aproximaciones a las soluciones con RK2 y RK4 en el mismo paso.
   (d) (10 puntos) Sea $\partial_t x = -\cosh(\beta x)$, $\beta < 0$. Use su respuesta anterior para calcular 2 pasos con RK2 de la solución para esta ecuación.

4. *Estabilidad en problemas de valor inicial.* Sea $\partial_x y = f(x, y(x))$, con $y(x_0) = y_0$. Suponga que busca una solución en un intervalo finito $x_0 < x < b$. Sean $\varepsilon > 0$ y $y_\varepsilon$ la solución a la ecuación a partir del valor inicial $y_0 + \epsilon$ (problema perturbado).
   (a) (10 puntos) ¿Qué condiciones tienen que satisfacer para que una solución $y(x)$ exista y sea única?
   (b) (20 puntos) ¿Qué condiciones se tienen que cumplir para que el problema de valor inicial sea estable? Es decir,
   $$\max\{|y_\epsilon(x) - y(x)| : x_0 \leq x \leq b\} \leq c\varepsilon,$$
   para alguna $c > 0$. Ilustre su respuesta con dos ejemplos simples, uno para soluciones estables, y uno para inestabilidad.
   (c) (10 puntos) ¿Qué tiene que ver la estabilidad con la existencia y unicidad de las soluciones? Explique de la manera más formal posible.
   (d) (10 puntos) Demuestre que
   $$y(x) - y_\varepsilon(x) = -\varepsilon \exp\left(\int_{x_0}^{x} g(t)dt\right),$$
   con $g(t) = \partial_z f(t, z)$ en $z = y(t)$, para $x$ suficientemente cercano a $x_0$.

(e) (10 puntos) Considere la ecuación lineal $\partial_x y = ay(x) + b(x)$, con $x \leq x_0$, y $a$ una constante dada, cuya solución general es

$$y(x) = ce^{ax} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-t)} b(t)dt \tag{1}$$

Verifique que $y(x) \equiv 1$ es la solución al problema $\partial_x y = 1 - y(x)$, con $y(0) = 1$, para $0 \leq x \leq b$; que la solución al problema perturbado es $y_\epsilon(x) = 1 + \epsilon e^{-x}$, para $x \leq 0$; y que (c) la solución al problema de valor inicial es estable en $[0, b]$.

5. *Problema rígido (stiff).* Sean $u(t) = (v(t), w(t))$, $u_0 = (v_0, w_0)$ un valor para un tiempo inicial $t_0$, y considere el problema

$$\partial_t u = Au, \quad u(0) = u_0, \tag{2}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a + ib \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) (10 puntos) Calcule la solución de la ecuación (2).

(b) (20 puntos) Suponga que $a << -1$ y $|w_0| << 1$. ¿Son suficientes estas condiciones para llamar rígido al problema? Pista: Describa qué pasa con las soluciones al suponer esas condiciones. En particular, compare las dos componentes de las soluciones y tome en cuenta sus escalas temporales.

(c) (10 puntos) Suponga un paso de tamaño $h$ para calcular una solución numérica. Demuestre que la iteración del mapeo definido por el método de Euler aplicado la ecuación (2) da

$$u_n = (I + hA)^n u_0 = \begin{pmatrix} (1 + (a + ib)h)^n w_0 \\ (1 - h)^n v_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(d) (10 puntos) Describa las condiciones que tiene que cumplir $h$ para que la aproximación de la solución con $a << -1$ y $|w_0| << 1$ sea buena. Es decir, que

$$u(t) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} v_0 \end{pmatrix}.$$

Pista: Considere $(1 - (a + ib)h)^n$ y $(1 - h)^n$ por separado.