Examen General
Teoría de las Gráficas
11 de enero de 2023

Duración: 4 horas. Resolver 8 ejercicios de los siguientes 11. (Si se entregan más de 8 ejercicios, se calificará sobre los 8 ejercicios de menor puntaje).

1. Una arista e en una gráfica 2-conexa es *contraíble* si G/e también es 2-conexa. Demuestre que toda gráfica 2-conexa con más de tres vértices tiene una arista contraíble. Concluya que toda gráfica 2-conexa con al menos tres vértices puede reducirse a un triángulo por medio de contracciones sucesivas.

2. Demuestre que si G tiene sucesión de grados $(d_1, \ldots, d_{|V|})$, con $d_1 \leq \cdots \leq d_{|V|}$, entonces $\chi \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$.

3. Una gráfica G es *unicamente k-coloreable por aristas* si cualesquiera dos k-coloraciones propias de G inducen la misma partición de E. Demuestre que toda gráfica cúbica únicamente 3-coloreable tiene exactamente tres ciclos hamiltonianos.

4. Sean G una gráfica euleriana no trivial y $u \in V_G$. Demuestre que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano si y sólo si $G - u$ es acíclica.

5. Sean m y n enteros mayores o iguales que 2. Exhiba condiciones suficientes y necesarias en términos de m y n para que el producto cartesiano $P_m \square P_n$ sea hamiltoniano.

6. Sea $\mathcal{T}$ una familia de subárboles de un árbol T. Demuestre que si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}$ tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de $\mathcal{T}$.

7. Sea k un entero mayor o igual a 2. Demuestre que toda gráfica k-conexa de orden al menos $2k$ contiene un ciclo de longitud al menos $2k$.

8. Demuestre que una gráfica plana es 4-coloreable por caras si y sólo si es la unión de dos subgráficas eulerianas.

9. Sean S y T conjuntos independientes máximos en G. Demuestre que $G[S \triangle T]$ tiene un apareamiento perfecto.

10. Sea $N(x, y)$ una red tal que todas sus capacidades son enteras. Demuestre que existe un flujo máximo en N donde todos los valores son enteros.

11. Demuestre que el Teorema del Flujo Máximo-Corte Mínimo implica el Teorema de König.