Examen General de Topología Algebraica

Este es un examen de 100 puntos. Para aprobar el examen se requiere un mínimo de 75 puntos; y para obtener mención en el examen, un mínimo de 90 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

¡Éxito!

1. (20 ptos. en total) Demuestre que un espacio topológico X es contraíble si y sólo si para todo espacio topológico Y se cumple que toda función continua $X \to Y$ es nulhomotópica.

2. (20 ptos.) Construya un espacio topológico que tenga grupo fundamental isomorfo a $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}$.

3. (20 ptos.) Calcula la homología con coeficientes enteros del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por $A \cup B \cup C$ donde:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ B &= \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ C &= \{(0, 0, z) : -1 \leq z \leq 1\}. \end{aligned}$$

4. (20 ptos.) Demuestre que para todo $g \geq 2$ existe un cubriente $S_g \to S_2$, es decir, que la superficie de género 2 es cubierta por cualquier superficie de género $g \geq 2$. Demuestre además que el toro no es cubierto por ninguna superficie cerrada de género $g \geq 2$.

5. (20 ptos.) Calcule la homología con coeficientes enteros del espacio que se obtiene al identificar entre sí todas las aristas de un pentágono relleno (es decir, el pentágono incluye su interior), con las orientaciones indicadas en la figura. *Advertencia*: una flecha apunta en la dirección contraria a las otras cuatro.