EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL
2023-1

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones:

1. *Este examen tiene 6 problemas, cada uno de ellos vale 20 puntos.*
2. *Los problemas marcados con (*) son obligatorios.*
2. *Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 80 puntos.*
3. *El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.*

(*) Problema 1. Una relación de equivalencia en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ se define mediante

$$(z_0, ..., z_n) \sim (w_0, ..., w_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ tal que } (w_0, ..., w_n) = (\lambda z_0, ..., \lambda z_n).$$

El espacio cociente $\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} - 0)/\sim$ se llama el espacio proyectivo complejo.

a) Demuestre que $\mathbb{C}P^n$ es compacto.

b) Sea $U_i = \{[z_0, ..., z_n] : z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$, para $i = 0, ..., n$. Defina una función adecuada $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, tal que $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^n$ nos da una atlas suave para $\mathbb{C}P^n$.

c) ¿Cuál es la dimensión real de $\mathbb{C}P^n$?

Problema 2. Considere el toro $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$, donde $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y sea α un número irracional fijo. Considere la función

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow T^2, \quad \gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}).$$

Demuestre que la imagen $\gamma(\mathbb{R})$ es una subvariedad suave de T^2, pero no es una subvariedad encajada.

(*) Problema 3. Una función $h : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y, z) = (2 - (x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2$$

a) Demuestre que 1 es un valor regular de h. Denote por $N = h^{-1}(1)$.

b) Demuestre que N y la superficie

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

no son transversales.

c) Demuestre que N y la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\}$$

son transversales. Identifique la variedad $N \cap \Sigma$.

Problema 4. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $\Delta = \{(v, v) : v \in V\}$ la diagonal de $V \times V$. Dada una transformación lineal $T : V \to V$, consideramos su gráfica, es decir el subespacio de $V \times V$ dado por $W = \{(v, Tv) : v \in V\}$. Pensando en W y Δ como subvariedades suaves de $V \times V$, pruebe que W y Δ son transversales si y solo si 1 **no** es un valor propio de T.

Problema 5. Considera la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

a) Prueba que 0 es el único valor crítico de f.

b) Demuestra que si a y b son ambos positivos o ambos negativos, entonces $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ son difeomorfos y prueba que si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ no son difeomorfos.

c) ¿Es $f^{-1}(0)$ una subvariedad suave?

Problema 6. Demuestre que una variedad suave simplemente conexa es orientable.