Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2023-1

Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 3 preguntas con incisos, cada uno con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 15. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 9.5 puntos. Para recibir mención honorífica es necesario obtener al menos 13.5 puntos.

Preguntas:

1. **(9 puntos)** Sea (C, τ_C) el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por $C = [0,1] \times [0,1]$ equipado con su topología usual y sea $X = C \times \{0,1\}$. Para cada $c \in C$ y cada $U \in \tau_C$ tal que $c \in U$ se considera $M(c,U) = (U \times \{0,1\}) \setminus \{(c,0)\}$. Además, para cada $(c,i) \in X$ se toma la familia:
$$\mathcal{B}(c,i) = \begin{cases} \{M(c,U) : c \in U \in \tau_C\}, & \text{si} \quad i = 1; \\ \{\{(c,0)\}\}, & \text{si} \quad i = 0. \end{cases}$$
Sea $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}(c,i) : (c,i) \in X\}$. Da por hecho que $\mathcal{B}$ es una base para X (no es necesario probarlo) y que τ es la topología generada por esa base. Determina y argumenta si:
   (i) **(1.5 puntos)** X es compacto.
   (ii) **(1.5 puntos)** X es primero numerable.
   (iii) **(1 punto)** X es segundo numerable
   (iv) **(1 punto)** X es separable.
   (v) **(1.5 puntos)** X es conexo.
   (vi) **(1 punto)** X es metrizable.
   (vii) **(1.5 puntos)** Encuentra $\max\{i \in \{0,1,2,3,3\tfrac{1}{2},4\} : X \text{ es } T_i\}$. Argumenta.

2. **(1.5 puntos)** Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios T_2 y compactos. Supongamos que para cada $i \in \{1,2\}$ se fijó un punto $p_i \in X_i$ y sea τ_i' la topología relativa de $X_i \setminus \{p_i\}$.
Sea $f : (X_1 \setminus \{p_1\}, \tau_1') \to (X_2 \setminus \{p_2\}, \tau_2')$ una función continua y sea $F : X_1 \to X_2$ dada por
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad x \neq p_1; \\ p_2, & \text{si} \quad x = p_1. \end{cases}$$
Falso o verdadero con argumento: si F es continua, entonces f es cerrada y tiene fibras compactas.

3. **(4.5 puntos)** Consideremos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la topología producto. Definamos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la relación $f \sim g$ si y sólo si
$$|\{x \in \mathbb{N} : f(x) \neq g(x)\}| < \aleph_0.$$
Demuestra las siguientes afirmaciones:
   (i) **($\frac{1}{2}$ punto)** La relación $\sim$ es de equivalencia.
   (ii) **(1 punto)** Para cada $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, su clase de equivalencia definida por $\sim$ es un subconjunto denso en el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (iii) **(1.5 puntos)** El espacio cociente de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ inducido por $\sim$ tiene al menos tantos elementos como $\mathbb{R}$.
   (iv) **(1.5 puntos)** La topología cociente en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ inducida por $\sim$ es la topología indiscreta.