Examen General de Estadística
Semestre 2021-1
Febrero, 2021.
9:00-14:00 hrs

Instrucciones: Resuelve las preguntas justificando tus respuestas, se requieren 4/6 para aprobar el examen. Tiempo máximo de examen: 5 horas.

1. Inferencia Estadística

1. Sea $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ una m.a. de alguna distribución en donde $\mathrm{E}(X) = \mu_X$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$ y $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$. Encuentra el límite al que convergen en probabilidad cada una de las siguientes estadísticas:

   1.1. $S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$,
   1.2. $C_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i$,
   1.3. $S_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$,
   1.4. $R_{X,Y} = \frac{S_{X,Y}}{S_X S_Y}$.
   1.5. ¿Qué sucede con el límite de todas estas estadística si en lugar de dividir por n las estadísticas S_X^2, S_Y^2 y $S_{X,Y}$ dividimos por $n-1$?

2. Suponga que el estadístico A observa $X_1, \ldots, X_n$ ensayos Bernoulli independientes e idénticamente distribuidos y toma una decisión. El estadístico B únicamente observa $X_1 + \cdots + X_n$ y construye $X_1', \ldots, X_n'$ de acuerdo a la distribución condicional de $X_1', \ldots, X_n'$ dado $Y = X_1 + \cdots + X_n$. Muestre que B tomará decisiones tan bien como A.

3. Sea $X_1, ..., X_n$ v.a. iid $U(0, \theta)$, se tiene interés en estimar $\tau(\theta) = \theta$.

   3.1. Demostrar que el UMVUE para $\tau(\theta)$ es $\frac{n+1}{n}T$ donde $T = X(n)$
   3.2. Considere ahora el contraste de hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$
   3.3. ¿Existe una prueba uniformemente más potente? Si es así, exhíbala.

2. Inferencia Bayesiana

1. *Suficiencia*

(a) ¿Cuál es la intuición detrás de la noción de *estadística suficiente*? Escribe la definición bayesiana de estadística suficiente (en el contexto de un modelo paramétrico) y discútela. (40 %)

(b) Sea $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ un modelo paramétrico con estadística suficiente $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$. Supón que $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ se puede particionar como $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}))$ y que $p(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{\theta})$ $= p(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}))$. Demuestra que, para cualquier densidad inicial $p(\boldsymbol{\theta})$, basta conocer $p(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta})$ para calcular la densidad final $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$. (60 %)

2. *Familias Conjugadas*

(a) ¿Cómo se define la *familia conjugada estándar* para un modelo paramétrico $p(x|\theta)$? (20 %)

(b) Considera el modelo Poisson, con función de probabilidad de la forma

$$\mathrm{Po}(x|\lambda) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x = 0, 1, \ldots; 0 < \lambda).$$

Encuentra la familia conjugada estándar para este modelo y demuestra que dicha familia es cerrada bajo muestreo. (30 %)

(c) Supón que dos familias de distribuciones iniciales, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, son ambas conjugadas (en el sentido de que son cerradas bajo muestreo) para un modelo paramétrico $p(x|\theta)$. Demuestra que tanto la unión como la intersección de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ también son cerradas bajo muestreo. (50 %)

3. *Teoría de Decisiones*

(a) ¿Cuáles son los cuatro *elementos básicos* de un problema de decisión en ambiente de incertidumbre? (20 %)

(b ¿Cuál es el resultado fundamental de la Teoría de Decisiones Bayesiana?
. (20 %)

(c) Supón que se requiere una predicción puntual de la variable aleatoria (real y continua) $Y = X_{n+1}$ después de haber observado la muestra $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Plantea este problema como un problema de decisión estadístico usando la función de pérdida

$$L(\hat{y}, y) = k_1\,(y - \hat{y})\,\mathrm{I}_{(-\infty,y)}(\hat{y}) + k_2\,(\hat{y} - y)\,\mathrm{I}_{[y,\infty)}(\hat{y}),$$

donde $I_C(\cdot)$ denota a la función indicadora del conjunto C, y k_1 y k_2 son constantes positivas. Demuestra que el predictor óptimo $\hat{y}_*$ es el cuantil de orden $q = k_1/(k_1 + k_2)$ de la distribución predictiva $p(y|\boldsymbol{x})$.

. (60 %)