ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen General Semestre 2023-II

Instrucciones :

- Duración 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es de 60 puntos.

¡Buena suerte!

Ejercicio 1 (25 puntos). Considera el sistema,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x^3 - xy^2 \\ x - y^3 - yx^2 \end{pmatrix}$$

(1) Linealiza el sistema alrededor del origen y encuentra los valores propios.

(2) Calcula el signo de $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t))$, donde $V(x, y) = x^2 + y^2$ y $(x(t), y(t))$ es una trayectoria del sistema. Da una interpretación geométrica del signo de la expresión.

(3) ¿Qué puedes concluir sobre la estabilidad del origen? Menciona, en su caso, cuál es la cuenca de atracción. Compara tu respuesta con el inciso (1) y explica la utilidad de contar con una función de Lyapunov.

Ejercicio 2 (25 puntos).

Considera el siguiente sistema lineal periódico,

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

(1) Para una $t \in \mathbb{R}$ fija, calcula los valores propios del $A(t)$.

(2) Demuestra que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{t/2}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}.$$

es la matriz fundamental principal del sistema. ¿Porqué podemos decir que hay una dirección inestable?

(3) ¿Cuál es el periodo de $A(t)$? Encuentra la forma normal de Floquet del sistema y los multiplicadores y exponentes de Floquet.

(4) Compara los valores propios que encontraste en (1) con los multiplicadores de (3). ¿Qué puedes concluir de la utilidad de los valores propios de $A(t)$ en este caso?

Ejercicio 3 (25 puntos). Considera el sistema no-lineal en $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}_1 = -x_1,$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + 2x_1^2.$$

(1) Encuentra explícitamente el flujo del sistema con condición inicial $x_1(0) = u_1$ y $x_2(0) = u_2$.

(2) Linealiza el sistema alrededor del origen y encuentre los espacios estables e inestable E^S y E^U.

(3) Encuentra las variedades estable e inestable $W^S(0)$ y $W^U(0)$, y haz un dibujo.

Ejercicio 4 (25 puntos). Considera el sistema,

$$\dot{x} = \epsilon x - xy,$$
$$\dot{y} = -y + x^2 - 2y^2,$$

para $\epsilon \in \mathbb{R}$.

(1) Linealiza el sistema alrededor del origen.

(2) Encuentra un conjunto invariante para el sistema, tal que,

$$y = h(x) = A_2 x^2 + A_3 x^3 + ...$$

(3) Calcula la dinámica dada por la ecuación,

$$\dot{x} = \epsilon x - xh(x)$$

(4) ¿Qué puedes decir sobre la dinámica para $\epsilon = 0$, $\epsilon < 0$ y $\epsilon > 0$? Argumenta tu respuesta en términos de la linealización que encontraste en (1) en términos de ϵ. ¿Cuántos puntos fijos hay para $\epsilon > 0$ y cuál es su estabilidad?