Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2023-2

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

Ejercicios:

1. (10 puntos) Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$. Aplica el método de curvas características para calcular la solución de

$$\begin{aligned} u_t + c\,xtu_x &= \lambda u \quad \text{en } (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) &= f(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. (10 puntos) Usa el método de separación de variables para encontrar la solución de la ecuación con *condiciones periódicas*:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{en } (0,\infty)\times(0,2\pi), \\ u(t,0) &= u(t,2\pi) \quad \text{para } t>0, \\ u(0,x) &= f(x) \quad \text{para } x \in (0,2\pi), \\ u_t(0,x) &= g(x) \quad \text{para } x \in (0,2\pi), \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(10x) - \sin(-x) \quad \text{y} \quad g(x) = \cos(10x) + \sin(x).$$

3. (10 puntos) En términos del principio de Huygens, explica las diferencias entre las ondas en una, dos y tres dimensiones.

4. (10 puntos) Explica para qué sirve el método de Perron y describe brevemente en qué consiste.

5. (10 puntos) Explica a detalle qué es una función de Green y cómo se puede usar para construir una solución explícita. Da un ejemplo de una fórmula cerrada para una función de Green.

6. Di verdadero o falso y justifica tu respuesta.

   (a) (5 puntos) Todas las funciones armónicas en $\mathbb{R}^N$ son acotadas.

(b) (5 puntos) Si una función armónica es acotada, entonces es constante.

(c) (5 puntos) Una función armónica no puede tener puntos mínimos interiores pero sí puntos máximos interiores.

(d) (5 puntos) La ecuación de transporte en el Problema 1 se puede resolver fácilmente usando la transformada de Fourier.

(e) (5 puntos) Las funciones armónicas tienen la misma regularidad que sus datos de frontera.

(f) (5 puntos) La solución de la ecuación de onda es tan regular como sus condiciones iniciales en todas las dimensiones.

7. (20 puntos) Considera una solución de la ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{2}\Delta u = 0 \quad & \text{en } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = f(x) \quad & \text{para } x\in\mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

donde $f \in C_c^\infty(B_1(0))$ es no trivial y no negativa.

(a) ¿Cuál es la tasa de decaimiento de la solución $u(t,x)$ cuando $t\to\infty$? Es decir, encuentra una función $h:(0,\infty)\to(0,\infty)$ tal que

$$0 < \lim_{t\to\infty}\frac{u(t,x)}{h(t)} < \infty \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}^2.$$

(b) Si h es la función del inciso anterior, encuentra el límite $\lim_{t\to\infty}\frac{u(t,x)}{h(t)}$ para todo $x\in\mathbb{R}^2$.