

**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS**  
**Posgrado en Ciencias Matemáticas**  
**Examen General Semestre 2022-I**

**Instrucciones:** resuelva todos los ejercicios. Explique todos los pasos.

Duración: 4 horas

La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

¡Buena suerte!

1. (15 pts.) Enuncie el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones para el sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

con  $x$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ .

Deduzca la fórmula de las iteraciones de Picard para el mismo sistema.

Aplique el método de iteraciones de Picard a la ecuación

$$\dot{x} = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0.$$

Haga  $u_0 = 0$  y encuentre los iterados  $u_1, u_2$ .

2. (20 pts.)

Calcule la exponencial de las siguientes matrices y use los resultados para escribir las soluciones generales de los sistemas  $\dot{x} = Ax$  con la matriz  $A$  de cada inciso.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (15 pts.) Use el método de variación de parámetros para encontrar la solución general del sistema  $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$ . Encuentre la solución al problema con condición inicial  $x(0) = (1, 0)^T$ .

4. (15 pts.) Considere el sistema

$$\dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = x + ay(x^2 + y^2)$$

Encuentre el/los puntos de equilibrio y linealice alrededor de ellos.

Convierta el sistema a coordenadas polares. Resuelva explícitamente las ecuaciones resultantes y obtenga la solución explícita en coordenadas  $x, y$ . ( $a$  es un parámetro real.)

5. (15 pts.)

- (a) Enuncie el teorema de Poincaré-Bendixson.
- (b) Enuncie el Teorema de Dulac.
- (c) Enuncie el teorema de Hartman-Grobman.

6. (20 pts.) Considere la ecuación del péndulo escrita como sistema

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\operatorname{sen} x$$

Encuentre y clasifique los puntos de equilibrio (nodo estable, inestable, punto silla, no hiperbólico, etc.)

Linealice alrededor de los puntos de equilibrio y esboce los planos fase de las linealizaciones.

Demuestre que el sistema es Hamiltoniano. Encuentre el hamiltoniano y úselo para esbozar las trayectorias del sistema original no lineal.