Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2022-1

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

1. (20 puntos) Aplica el método de características para calcular la solución al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_x + 2xe^{-y}u_y &= e^y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) &= y. \end{aligned}$$

Haz un dibujo de las curvas características en el plano y encuentra la solución explícita. Dicha solución: ¿está definida globalmente (es decir, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)?

2. (20 puntos) Encuentra la única solución entrópica al siguiente problema de Riemann:

$$\begin{aligned} u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3\right)_x &= 0, && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x > 0, \end{cases} && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Justifica tu respuesta (unicidad y condición de entropía).

3. (20 puntos) Sean $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ es solución del siguiente problema con valores iniciales,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, && (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) &= g(x). && x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

(a) Sea $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ fijo pero arbitrario. Entonces se define para cualquier $x \in B_{t_0}(x_0) \backslash \{x_0\}$ la siguiente función,

$$\boldsymbol{v}(x) := \left(\frac{\nabla u(x,t)}{|x - x_0|} + u(x,t)\frac{x - x_0}{|x - x_0|^3} + u_t(x,t)\frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} \right)_{|t = t_0 - |x - x_0|}.$$

Demuestra que $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.

(b) Deriva una expresión para $u(x_0, t_0)$ en función de f y g mediante la integración de $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ en $B_{t_0}(x_0) \backslash B_\varepsilon(x_0)$ y tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Este ejercicio provee de una derivación alternativa de la fórmula de Kirchhoff (en dimensión $n = 3$).

4. (20 puntos) Sea u una función no idénticamente cero y armónica en $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Se define la función

$$N(r) := \frac{r \displaystyle\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{\partial B_r(0)} u(x)^2 \, dS_x}, \qquad r \in (0,1).$$

(a) Demuestra que $N(r)$ es una función no decreciente de $r \in (0,1)$. Calcula

$$\lim_{r \to 0^+} N(r).$$

(b) Demuestra que para cualesquiera $0 < r < R < 1$ se cumple la estimación

$$\frac{1}{R^{n-1}} \int_{\partial B_R(0)} u(x)^2 \, dS_x \leq \left(\frac{R}{r} \right)^{2N(R)} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} u(x)^2 \, dS_x.$$

A la cantidad $N(r)$ se le denomina *frecuencia*. La estimación en (b) para el caso $R = 2r$ se le conoce como la condición de doblamiento.

5. (20 puntos) Aplica el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), & 0 < x < L, \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es una constante y $g \in C([0,L])$ es una función continua. Demuestra que

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{1}{L} \int_0^L g(s) \, ds,$$

para cada $x \in [0,L]$ fijo.

Notación: Aquí $B_r(x_0)$ denota la bola abierta en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$ (según el contexto de cada ejercicio) de radio $r > 0$ y centro en x_0.