

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2021-2

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.

1. (20 puntos) Considera el siguiente sistema no lineal en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= y + x^3.\end{aligned}$$

- (a) Demuestra que el origen es un punto de equilibrio de tipo hiperbólico.
- (b) Calcula el flujo $\varphi(t; (0, 0))$ del sistema.
- (c) Usando el flujo φ del inciso anterior determina las variedades estable e inestable, \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u , respectivamente, en el origen.

2. (20 puntos) Considera el siguiente sistema no lineal en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + xy, \\ \dot{y} &= -y + \sin^2 x.\end{aligned}$$

¿Es el origen un punto de equilibrio estable? ¿Es asintóticamente estable? O bien, ¿es inestable? Justifica tu respuesta con detalle.

3. (20 puntos) Considera la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x} + x^2 - x^4 = 0.$$

- (a) Escribe la ecuación como un sistema de primer orden en \mathbb{R}^2 .
 - (b) Encuentra una integral primera del sistema.
 - (c) Encuentra todos los puntos de equilibrio del sistema y clasifícalos según su estabilidad.
 - (d) Demuestra que $(x, y) = (1, 0)$ es un punto de equilibrio hiperbólico. ¿Qué valor debe tener y_0 de forma que $(0, y_0) \in \mathcal{W}^u(1, 0)$? Misma pregunta para $\mathcal{W}^s(1, 0)$.
 - (e) Haz cuidadosamente un dibujo del plano de fases del sistema.
4. (20 puntos) Aplica el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - 5y^2),\end{aligned}$$

tiene una órbita periódica. *Sugerencia:* Encuentra una región anular adecuada alrededor del origen.

5. (20 puntos) Considera el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Calcula una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema.
- (b) Encuentra la forma normal de Floquet compleja de $\Phi(t)$.
- (c) Encuentra la forma normal de Floquet real de $\Phi(t)$.
- (d) Especifica el valor de los multiplicadores y exponentes de Floquet.
- (e) El origen (o solución cero), ¿es estable? ¿Es asintóticamente estable? Justifica tu respuesta.