Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2021-2

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.

1. (20 puntos) Aplica el método de características para resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + 2te^{-x}u_x &= e^x, \quad && x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Haz un dibujo de las curvas características. ¿La solución encontrada está globalmente definida (es decir, existe para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$)? Explica tu respuesta.

2. (20 puntos) Resuelve el siguiente problema de Cauchy para la ecuación del calor:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} \alpha, & x < 0, \\ \beta, & x > 0, \end{cases}$$

donde $\alpha \neq \beta$ son constantes. Verifica que la fórmula obtenida es, efectivamente, solución del problema de Cauchy, que satisface

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = g(x).$$

Nota que la condición inicial es discontinua en $x = 0$. ¿Cual es la regularidad de la solución calculada? Justifica tu respuesta. Calcula el límite,

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo.

3. (20 puntos) Calcula la solución del siguiente problema de valores iniciales y de frontera tipo Neumann para la ecuación de onda en una dimensión espacial:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= e^{-t} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad && x \in [0, L],\ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, && x \in [0, L], \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, && t > 0, \end{aligned}$$

donde $L > 0$ es constante. Justifica todos los pasos y verifica que, efectivamente, la solución encontrada resuelve el problema.

4. (20 puntos) Sea $u = u(x,t)$, $0 \leq u \leq 1$, la densidad normalizada de tráfico vehicular que es solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_t + v_m(1 - 2u)u_x &= 0, \qquad && x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde $v_m > 0$ es una constante (velocidad máxima) y $g \in C^1(\mathbb{R})$ es una densidad inicial conocida tal que $g' = g'(x)$ tiene un único máximo $x_1 \in \mathbb{R}$ con

$$g'(x_1) = \max_{x \in \mathbb{R}} g'(x) > 0.$$

(a) Haz un estudio de las características del problema, determina la velocidad característica y deduce que la solución genera una onda de choque a tiempo finito.

(b) Demuestra que para tiempos cortos, $0 < t \ll 1$, la solución u está definida implícitamente por la fórmula
$$u = g(x - v_m t(1 - 2u)).$$
Demuestra que el tiempo de rompimiento, $t = t_* > 0$, definido como el instante en el que se forma la onda de choque, es el primer valor de t para el cual se cumple la relación
$$1 - 2v_m t g'(x - v_m t(1 - 2u)) = 0.$$

(c) Muestra que el punto inicial de la onda de choque, (x_*, t_*), pertenece a la característica Γ_{x_1} que pasa por el punto $(x_1, 0)$ y prueba que
$$t_* = \frac{1}{2v_m g'(x_1)}.$$

5. (20 puntos) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio abierto, acotado con frontera suave (al menos $\partial\Omega \in C^1$) y sea el dominio exterior $\Omega_e := \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$. Demuestra que el problema de Robin para el dominio exterior, a saber,
$$\begin{aligned} \Delta u = 0, \quad & \text{en } \Omega_e, \\ \partial_\nu u + \alpha u = g, \quad & \text{sobre } \partial\Omega_e, \\ u \text{ acotada}, \quad & \text{en } \Omega_e, \end{aligned}$$
donde $\alpha \geq 0$ es constante, $g \in C(\partial\Omega_e)$ y $\partial_\nu u$ denota la derivada normal exterior de u sobre $\partial\Omega_e$, tiene, a lo más, una solución de clase $C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$. Para ello sigue los pasos que se detallan a continuación:

(a) Demuestra que cualquier solución del problema satisface la siguiente estimación de gradiente:
$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{C}{|x|^2}, \qquad j = 1, 2,$$
siempre que $|x|$ es suficientemente grande y para cierta constante $C > 0$. *Sugerencia:* Puedes emplear la transformada de Kelvin,
$$y = T_a(x) = \frac{a^2}{|x|^2} x, \quad x = T_a^{-1}(y) = T_a(y) = \frac{a^2}{|y|^2} y,$$
donde $a > 0$ es suficientemente grande tal que $\Omega \subset B_a(0)$ y $B_e = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x| > a\} \subset \Omega_e$. Verifica que $T_a(B_e) = B_a(0) \backslash \{0\}$. Puedes usar (sin demostrar) que $v(y) = u(T_a(y))$ es armónica en $T_a(B_e)$ con el fin de obtener una cota para $|\partial v / \partial y_j|$ en $|y| < a/2$. Usa esta información para probar la cota deseada. Nótese que esta estimación es independiente de la condición de frontera.

(b) Sean u_1, u_2 dos soluciones del problema y define $w := u_1 - u_2$. Integra apropiadamente por partes y usa la cota del inciso (a) para probar que, para $R > 0$ suficientemente grande,
$$\int_{\Omega_e \cap B_R} |\nabla w|^2 \, dx \leq \frac{C_0}{R^{3/2}}.$$
(Justifica todos los pasos.) Concluye.