Examen General de Estadística
Semestre 2021-2
Agosto, 2021.
9:00-14:00 hrs

Instrucciones: Deberá responder todas las preguntas del examen justificando sus respuestas. Se requieren 4/6 preguntas para aprobar el examen. Tiempo máximo de examen: 5 horas.

1. Sea $W = XY \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu} \in R^n$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in R^{n \times n}$. En donde X es un vector de $m \times 1$ y Y de $r \times 1$, además $n = m + r$. Demuestra que

   a) X y Y son normales multivariadas.

   b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{0} \iff X \perp\!\!\!\perp Y \quad (\mathbf{0}$ la matriz de ceros de $m \times r)$.

   Si W no es una v.a. normal multivariada, ¿se cumple que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{0} \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$? (en caso de que tu respuesta sea negativa, da un contraejemplo).

   [Valor: a) 2 puntos, b) 3 puntos y pregunta adicional 1 punto]

2. Se $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una $N(\theta, \theta^2)$, $\theta > 0$. Para este modelo tanto $\bar{X}$ como cS son estimadores insesgados de θ. En donde S^2 es la varianza muestral y
$$c = \frac{\sqrt{n-1}\ \Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\ \Gamma(n/2)}.$$

   a) Demuestra que para cualquier número a, el estimador $W(a) = a\bar{X} + (1-a)cS$ es un estimador insesgado de θ.

   b) Encuentra el valor $\hat{a}$ que produce el estimador $W(\hat{a})$ con varianza mínima.

   c) Muestra que $(\bar{X}, S^2)$ es una estadística suficiente para θ, pero no es una estadística completa.

   [Valor: a) 1 punto, b) 2 puntos y c) 2 puntos]

3. Considera una muestra aleatoria de una población con función de densidad $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$

   a) Construye la región de rechazo para $H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad vs \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$, con λ_1, λ_0 conocidos suponiendo primero que $\lambda_0 < \lambda_1$ y luego que $\lambda_0 > \lambda_1$.

   b) Construye la región de rechazo para $H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad vs \quad H_1 : \lambda > \lambda_0$, con λ_0 conocido. ¿la prueba correspondiente es la prueba uniformemente más potente(UMP)?

   c) Repite b) ahora para $H_1 : \lambda < \lambda_0$. ¿la prueba correspondiente es la prueba uniformemente más potente(UMP)?

   c) Repite c) ahora para $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. ¿la prueba correspondiente es la prueba uniformemente más potente(UMP)?

4. El sistema de justicia está repleto de casos en los que el razonamiento probabilístico se ha aplicado de manera errónea. En 1964, una pareja interracial fue declarada culpable del delito de robo en Los Angeles. El argumento principal del fiscal fue que el perfil de la pareja coincidía con el perfil reportado por un testigo y que dicho perfil era altamente improbable.

   Específicamente, según el testigo, los ladrones tenían las siguientes características:

   - Un hombre negro con bigote y barba.
   - Una mujer rubia con cola de caballo.
   - La pareja conducía un auto amarillo.

   El fiscal argumentó que la probabilidad de observar este perfil, si la pareja es culpable, es prácticamente uno. Suponiendo esto y que la probabilidad *a priori* de que "una pareja elegida al azar en Los Angeles sea la culpable" es de 1/1,625,000, ¿cuál es la probabilidad de que una pareja con el perfil indicado sea realmente la culpable?

   Nota. Es razonable suponer que la probabilidad de observar la evidencia en una pareja que <u>no</u> es culpable es pequeña. Supón que dicha probabilidad es 1/3,000.

5. Para llegar a la universidad, una estudiante puede viajar en bicicleta o en metro. La estudiante quiere establecer con cuál de estos dos medios de transporte tiene mayor posibilidad de llegar a tiempo a su primera clase del día, por lo que decide realizar una serie de pruebas. Los resultados fueron los siguientes: de $n = 7$ ocasiones en que viajó en bicicleta, siempre llegó a tiempo; por otro lado, de $m = 9$ ocasiones en que tomó el metro, llegó tarde en una ocasión. Denotemos por θ y ψ a las probabilidades de que llegue a tiempo a su clase cuando viaja en bicicleta y en metro, respectivamente.

   Suponiendo que las pruebas son independientes, y asignando distribuciones iniciales $\mathrm{U}(0,1)$ a θ y ψ:

   (a) Obtén la distribución final de (θ, ψ).

   (b) Encuentra el estimador bayesiano óptimo para $\lambda = \theta - \psi$ con base en una función de pérdida cuadrática.

   (c) Encuentra el intervalo de máxima densidad (de probabilidad 0.95) para θ.

   (d) Verifica la hipótesis $H_0 : \theta > \psi$.

6. Sea $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria de observaciones independientes con distribución desconocida $f(x)$. Supón que $f(x)$ sólo puede ser uno de los siguientes modelos paramétricos:

   $\mathcal{M}_1 : f(x) = p_1(x|\theta_1), \;\; \theta_1 \in \Theta_1;$ con distribución inicial $p_1(\theta_1)$, propia;

   $\mathcal{M}_2 : f(x) = p_2(x|\theta_2), \;\; \theta_2 \in \Theta_2;$ con distribución inicial $p_2(\theta_2)$, propia.

   Supón también que, *a priori*, se considera que estos dos modelos son igualmente probables. El problema consiste en seleccionar uno de ellos.[1]

   Sea μ una variable dicotómica que indica cuál de los dos modelos es el correcto. Entonces podemos escribir

$$f(x) = p(x|\theta_\mu, \mu) = \begin{cases} p_1(x|\theta_1) & \text{si } \mu = 1 \\ p_2(x|\theta_2) & \text{si } \mu = 2 \end{cases}$$

[1]Nota: $p_1(x|\theta_1)$ y $p_2(x|\theta_2)$ pueden pertenecer a familias paramétricas distintas; además, θ_1 y θ_2 pueden ser de distintas dimensiones. Por ejemplo, $p_1(x|\theta_1)$ podría ser Poisson(λ) [de manera que $\theta_1 = \lambda$] y $p_2(x|\theta_2)$ podría ser Binomial-Negativa(r, p) [con $\theta_2 = (r, p)$].

Dado que el valor de μ es desconocido, podemos considerarlo un parámetro más en este modelo extendido.

(a) Encuentra $p(\boldsymbol{x}|\mu)$ y, por lo tanto, la función de verosimilitud de μ;

(b) Encuentra la distribución final de μ.

(c) Supón ahora que se desea contrastar las hipótesis

$$H_1 : \mu = 1 \text{ vs } H_2 : \mu = 2$$

con base en la función de utilidad

$$u(\text{“Elegir } H_i\text{”}, \text{“}H_j \text{ es cierta”}) = I(i = j), \quad i, j = 1, 2,$$

donde $I(\cdot)$ denota la función indicadora. ¿Cuál es la regla de decisión para este problema?