Examen General de Estadística

Semestre 2023-2 (Julio 2023)

Instrucciones: Deberá responder todas las preguntas justificando sus respuestas.
Se requieren 4/6 puntos para aprobar el examen.
Tiempo máximo de examen: 5 horas (9:00-14:00 hrs.).

Inferencia Estadística

1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una Poisson(θ). Sea $\tau(\theta) = (1+\theta)e^{-\theta}$.
Obtenga un estimador insesgado de varianza mínima (UMVUE) para $\tau(\theta)$.
[Hint: Encuentre un estimador insesgado de $\tau(\theta)$ y utilice el teorema de Rao-Blackwell para mejorarlo.] Justifique sus respuestas.
[Valor: 3 puntos]

2. Sea X una v.a. que describe el tiempo de vida (en horas) de una partícula radiactiva. Suponga que la f.d.p. de X está dada por:

$$f(x|\theta) = \theta e^{-x\theta}, \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Una m.a. de n partículas se pone bajo observación, pero el experimento se detiene cuando la k-ésima partícula expira; es decir, no se espera hasta que todas las partículas hayan cesado su actividad, sino solo hasta que k de ellas (con k fijada de antemano) lo hayan hecho. Los datos consisten en las k mediciones $Y_1, \ldots, Y_k$, y de las $n-k$ mediciones restantes sólo se sabe que exceden el valor Y_k.

1. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud para el tiempo medio de vida de las partículas, i.e. $\tau(\theta) = 1/\theta$.
2. Exhiba una cantidad pivotal para $\tau(\theta) = 1/\theta$.

[Valor: 3 puntos]

3. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una $N(\mu, 1)$. Define $Y_i = \mathbb{1}(X_i > 0)$ y sea $\eta = P(Y_i = 1)$.

1. Encuentra el estimador máximo verosímil $\widehat{\eta}_n$ de η y demuestra que es un estimador consistente.
2. Obtén un intervalo asintótico del 95 % de confianza para η.
3. Si los datos no son normales, ¿el estimador $\widehat{\eta}_n$ es consistente? En caso de no serlo, ¿a qué converge en probabilidad?

[Valor: 4 puntos. 1.1 - 1 punto, 1.2. - 2 puntos, 1.3 - 1 punto]

Inferencia Bayesiana

4. Supongamos que $x \sim \exp(x|\theta\phi)$ y $y \sim \exp\ (y|\phi)$, y queremos hacer inferencias sobre θ.

i. Encuentre la distribución final $p(\theta,\phi|x,y)$ cuando $p(\theta,\phi) \propto p(\theta)$, es decir, se suponen independientes y una uniforme para ϕ. $p(\theta)$ puede ser propia o impropia. Demuestre que la marginal final de θ depende de x y y a través de $z = y/x$.
[Hint. $\int_0^\infty \phi^2 \exp\{-\phi(\theta x + y)\}\mathrm{d}\phi = 2/(\theta x + y)^3$]

ii. Complete a una transformación uno a uno de (x, y) en (z, w) y encuentre la densidad de z. [Hint. Solo depende de θ.]

iii. Usando la verosimilitud encontrada en (ii) y $p(\theta)$, encuentre la distribución final de θ y demuestre que NO es proporcional a la encontrada en (i).

iv. Finalmente, suponga $p(\theta,\phi) \propto \theta^{-1}\phi^{-1}$ y demuestre que la distribución final que se obtiene sí es proporcional a la encontrada en (i).

Discuta sus resultados.

5. Dado un modelo paramétrico $p(x|\theta_1,\theta_2)$ con distribución inicial $p(\theta_1,\theta_2)$, la distribución final está dada por

$$p(\theta_1,\theta_2|x) = \frac{p(\theta_1,\theta_2)\,p(x|\theta_1,\theta_2)}{\int\int p(\theta_1,\theta_2)\,p(x|\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2}.$$

i. Suponga que X es independiente de θ_1 dado θ_2, de manera que $p(x|\theta_1,\theta_2) = p(x|\theta_2)$.
Esto sugiere que el valor de X no proporciona información sobre θ_1.
Encuentre $p(\theta_1|\theta_2, x)$ y discuta el resultado.

ii. Ahora encuentre $p(\theta_1|x)$. ¿Depende esta distribución del valor de x?

iii. ¿Contradice esto el comentario en cursivas y el resultado del inciso (i)? Argumente su respuesta.

6. Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ una muestra aleatoria de una densidad perteneciente a la familia exponencial,

$$p(x|\theta) = a(x)\exp\{x'\theta - M(\theta)\},$$

y suponga una distribución inicial para θ en la familia conjugada natural.

i. Encuentre la "región de rechazo" bayesiana para contrastar las hipótesis simples $H_0 : \theta = \theta_0$ *vs.* $H_1 : \theta = \theta_1$ cuando se utiliza la función de pérdida

$$L(\hat\theta,\theta) = \delta(\hat\theta,\theta) \ = \ \int p(x|\theta)\log\frac{p(x|\theta)}{p(x|\hat\theta)}\mathrm{d}x.$$

ii. Si los hiperparámetros de la distribución inicial tienden a cero, ¿cómo se compara la forma de esta región con la correspondiente región de rechazo frecuentista obtenida a partir del método del cociente de verosimilitudes?