Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM

Examen de Admisión - Álgebra Lineal
Semestre 2020-2

Instrucciones: Resuelva 4 y sólo 4 ejercicios (si se entregan más de 4 ejercicios sólo se calificarán los 4 primeros). El ejercicio 1 es *obligatorio*. Por favor, no ponga más de un problema por hoja y escriba su nombre en cada hoja.

1. Considere la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & a \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$
   (a) ¿Cuál es el rango de A como función de $a \in \mathbb{R}$?
   (b) ¿Qué condiciones debe satisfacer $b \in \mathbb{R}^3$ para poder resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$, con $x \in \mathbb{R}^3$? ¿Cómo dependen esas condiciones de $a \in \mathbb{R}$?

2. Demuestre que todas las matrices reales de 2×2 con valores propios $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ se pueden representar de la siguiente forma:
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & a \operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{a}\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \text{o bien,} \quad \begin{bmatrix} \cosh\theta & a \operatorname{senh}\theta \\ -\frac{1}{a}\operatorname{senh}\theta & -\cosh\theta \end{bmatrix}.$$
   ¿Cuándo es una matriz real de 2×2 con valores propios $\lambda = 1, -1$, simétrica y ortogonal simultáneamente?

3. Suponga que $\{1, e^t, e^{-t}\}$ es una base de un espacio vectorial V de dimensión $n = 3$ de funciones continuas en $t \in [-1, 1]$. Defínase el siguiente producto escalar:
$$\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(t)v(t)\, dt, \qquad u, v \in V.$$
   (a) Encuentre una base ortonormal de V.
   (b) Encuentre todos los espacios invariantes de V bajo la transformación lineal $\mathcal{T} : V \to V$, $\mathcal{T}v = dv/dt$.

4. Sea $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ un conjunto ortonormal en un espacio vectorial $V \subset W$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Demuestre la *desigualdad de Bessel*: si $v \in V$ y $\alpha_j = \langle \varphi_j, u \rangle$, $j = 1, \ldots, k$, entonces

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 \leq \|u\|^2,$$

donde $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. Además, explique por qué la igualdad ocurre si y sólo si $u \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ (el subespacio de todas las combinaciones lineales de elementos en $\mathcal{B}$).

5. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule el polinomio característico de ambas matrices y verifique que son el mismo. Concluya que A y B tienen exactamente los mismos valores propios con las mismas multiplicidades algebraicas.

   (b) Demuestre que, sin embargo, A y B no son matrices *equivalentes*, es decir, no son representaciones del mismo mapeo lineal en distintas bases. *Sugerencia*: Muestre que $\lambda = 1$ es valor propio de A y de B pero con distinta multiplicidad *geométrica*.

6. Sean $u, v \in \mathbb{R}^4$, dados por:

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine la proyección ortogonal de u sobre span $\{v\}$.

   (b) Determine la proyección ortogonal de v sobre span $\{u\}^{\perp}$.