Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM

Examen de Admisión - Álgebra Lineal
Semestre 2019-2

Instrucciones: Resuelva 4 y sólo 4 ejercicios (si se entregan más de 4 ejercicios sólo se calificarán los 4 primeros). El ejercicio 1 es *obligatorio.* Por favor, no ponga más de un problema por hoja y escriba su nombre en cada hoja.

1. Considere el sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) ¿Para qué valores de α y β el sistema tiene solución?

   (b) ¿Para qué valores de α y β el sistema tiene una única solución?

   (c) En el caso en que el sistema no tenga solución única, describa todas las soluciones.

2. (a) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices similares. Demuestre que A y B tienen la misma ecuación característica y los mismos valores propios.

   (b) Demuestre que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene n vectores propios linealmente independientes si y sólo si A es similar a una matriz diagonal.

3. De todos los vectores $w \in \mathbb{R}^4$, que son ortogonales a v_1 y v_2, encuentre aquel que es más cercano a v_3, donde,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. Verifique si la siguiente función es una transformación lineal:

   $T : P_2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ b + c \end{bmatrix}$ donde para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, P_k es el conjunto de polinomios de grado a lo más k con coeficientes en $\mathbb{C}$.

5. Los conjuntos $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\beta = \{2, 1+x, -2x+x^2, -1-x+x^3\}$ son bases de P_3. Encuentre la matriz de cambio de base de α a β y utilícela para expresar al polinomio $p(x) = 2 - 3x + 4x^2 + x^3$ en términos de β.

6. Determine si es posible representar a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 2 \\ 2i & 0 & -1 \\ 0 & -(1+2i) & 0 \end{bmatrix}$$

como $A = \lambda U$ donde $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria (es decir, $UU^* = I$) y $\lambda \in \mathbb{C}$. ¿Es posible tener $\overline{\lambda} = -\lambda$? Explique su respuesta.