Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM

Examen de Admisión - Álgebra Lineal
Semestre 2020-1

Instrucciones: Resuelva 4 y sólo 4 ejercicios (si se entregan más de 4 ejercicios sólo se calificarán los 4 primeros). El ejercicio 1 es *obligatorio*. Por favor, no ponga más de un problema por hoja y escriba su nombre en cada hoja.

1. Sean λ y μ dos números complejos. Encuentre la solución general $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ al sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1, \\ x + \lambda y + z &= \mu, \\ x + y + \lambda z &= \mu^2. \end{aligned}$$

2. Sea $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Se define la matriz
$$A := I_3 - \frac{uu^\top}{\|u\|^2} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$
donde I_3 es la matriz identidad de 3×3, $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ denota el conjunto de todas las matrices de 3×3 con entradas en el campo de los números reales y $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^3}$ para cada $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Note que $uu^\top \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, cuya entrada (i, j) es $u_i u_j$, $1 \leq i, j \leq 3$. Calcule $\det A$. ¿Puede dar una explicación geométrica de su resultado?

3. Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, se denota $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todos los mapeos (o transformaciones) lineales de V en W. Sea el mapeo lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definido por $L(x, y) = (-x+y,\, 2x+y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentre una base $\mathcal{S} = \{u_1,\, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que
$$[L]_{\mathcal{S}} := M_L^{\mathcal{S}\to\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$
(Aquí $M_L^{\mathcal{S}\to\mathcal{T}}$ denota la representación matricial de un mapeo lineal $L \in \mathcal{L}(V, W)$ con respecto a las bases $\mathcal{S}$ de V y $\mathcal{T}$ de W.)

4. Calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de dos maneras distintas:

(a) Aplicando el método de eliminación Gaussiana.

(b) Escribiendo $A = I_4 - P$ y verificando que $\sum_{j=0}^{\infty} P^j$ converge (recuerde que, por definición, $P^0 = I_4$). Calcule la suma. (*Sugerencia:* Calcule las primeras potencias de P y verifique que la serie es *finita*. Calcúlela y compare con el resultado del inciso (a).)

5. Sean $V = \mathbb{F}[x;2]$ y $W = \mathbb{F}[x;3]$ los espacios vectoriales de polinomios en x de grado ≤ 2 y ≤ 3, respectivamente, con coeficientes en el campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Se define la transformación (o mapeo) lineal $L \in \mathcal{L}(V, W)$ mediante

$$L(q) := \int_0^x q(y)\, dy, \qquad \forall\, q(x) \in V.$$

Encuentre la matriz asociada a L de la base $\mathcal{S}$ de V a la base $\mathcal{S}'$ de W, donde

$$\mathcal{S} = \left\{1,\, x,\, x^2\right\}, \quad \mathcal{S}' = \left\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\right\}.$$

6. Sea $W \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio generado por los siguientes dos vectores:

$$W := \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Encuentre $w \in W$ tal que minimice $\|w - v\|$ con $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. ($\|\cdot\|$ es la norma usual en $\mathbb{R}^4$.)