Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM

Examen de Admisión - Álgebra Lineal
Semestre 2019-1

Instrucciones: Resuelva 4 y sólo 4 ejercicios (si se entregan más de 4 ejercicios sólo se calificarán los 4 primeros). El ejercicio 1 es *obligatorio*. Por favor, no ponga más de un problema por hoja y escriba su nombre en cada hoja.

1 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Encuentre la solución general a las ecuaciones:

(a) $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

(b) $Ax = Bx$.

2. Sean A y B dos matrices reales de $n \times n$.

(a) Demuestre que si A y B son simétricas entonces

$$\langle (A^2 + B^2)x, x\rangle \geq \langle (AB + BA)x, x\rangle,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$. Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto usual en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\langle x, y\rangle = \sum_j x_j, y_j$. (*Sugerencia:* Considere $\langle (A - B)^2 x, x\rangle$.)

(b) Encuentre un contraejemplo al inciso (a) si la hipótesis de simetría de A y B no se cumple.

(c) Si C es otra matriz real de $n \times n$ y suponemos que $\langle Cx, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ¿qué se puede decir de $B - C$? (No suponga que B es simétrica.)

3. Sea $V \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio definido por la ecuación $x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0$.

(a) Encuentre una base ortogonal del subespacio V.

(b) ¿Cuál es el punto sobre el plano $x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 36$ más cercano al origen?

4. Encuentre el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

es $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$. Demuestre que para ese valor del parámetro a la matriz A es diagonalizable sobre los reales, es decir, existe una matriz invertible S tal que $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal con entradas reales. ¿Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A **no** es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Explique su respuesta. (*Nota*: No es necesario calcular S^{-1}.)

5. Sea $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal en el plano definida como una rotación de ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ alrededor del origen en sentido inverso a las manecillas del reloj. Sean $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal en el plano definida como la imagen de un punto (x, y) con respecto a la recta $x = y$, y $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal en el plano definida como la imagen de un punto (x, y) con respecto al eje x. (Véase la figura 1.)

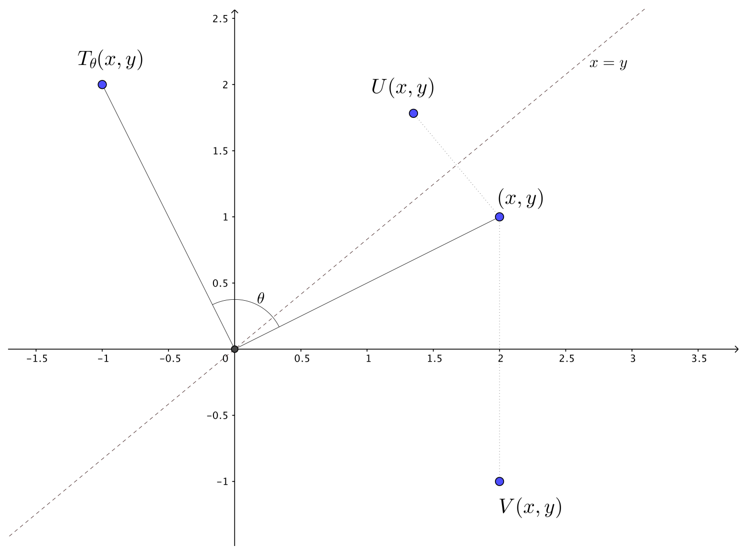

Fig. 1: Transformaciones T_θ, U y V.

(a) Encuentre las matrices que representan a las transformaciones T_θ, U y V en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es decir, $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Si para cierto η se tiene que $VT_\theta U = T_\eta$, exprese η en términos de θ.

6. **Cierto o falso**. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si $A^\top = A$, es decir, si $A_{ij} = A_{ji}$, para cualesquiera $1 \le i, j \le n$. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es positiva semi-definida si $\langle x, Ax\rangle := x^\top Ax := \sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} x_j \ge 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Los siguientes enunciados, ¿son ciertos o falsos? Demuéstrelos o de un contraejemplo.

(a) Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Si $v_j^\top A v_j \ge 0$ para todo $1 \le j \le n$ entonces A es positiva semi-definida.

(b) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfacen $x^\top Ax = x^\top Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $A = B$.

(c) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es positiva semi-definida y simétrica entonces $\sqrt{A_{ii}A_{jj}} \ge |A_{ij}|$, para cualesquiera $1 \le i, j \le n$.