Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión de Álgebra Lineal, 2020 Código ____________

Instrucciones. Escriba su nombre y un código formado por sus iniciales y fecha de nacimiento (8 dígitos, 4 para el año, 2 para el mes y 2 para el día), en la lista de asistentes a este examen y escriba el código en la esquina de cada una de las hojas de su examen. Escriba una hoja de respuestas y entréguela junto con el resto de su trabajo escribiendo su código en cada página. Tiene dos horas para para trabajar en su examen. Si la hoja de respuestas no está clara y además escrita por aparte del trabajo hecho para obtener las respuestas, el examen no será calificado. Comience a escribir las respuestas de su examen al menos 15 minutos antes de la hora límite. Sólo las respuestas contenidas en la hoja de respuestas serán consideradas para la calificación. Favor de no escribir en la tabla de la derecha.

Problema	Max	Puntos
1	10	
2	30	
3	15	
4	20	
5	20	
6	20	
Total:	115	

Preguntas

1. (10 puntos) Si $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ encuentre una expresión generalizada para A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : u \mapsto Au$, con A simétrica.
   (a) (10 puntos) ¿Son perpendiculares los vectores propios de A? Argumente formalmente su respuesta.
   (b) (10 puntos) Calcule los valores y vectores propios de $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) (10 puntos) Explique qué representan los valores propios de A e ilustre con un dibujo. Pista: considere las imágenes de los puntos $\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$ bajo T.

3. Sean $b \in \mathbb{R}^n$ y $A = [a_1 \quad ... \quad a_n] \in M_n(\mathbb{R})$. Defina
$$A_i(b) = (a_1 \ldots \underset{\uparrow\, i\text{-ésima entrada}}{\mathrm{b}} \ldots a_n)$$
   como la matriz A con la i-ésima columna reemplazada por el vector b.
   (a) (5 puntos) Pruebe que $A\ I_i(x) = A_i(b)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
   (b) (10 puntos) Usando el inciso anterior, demuestre la regla de Cramer: Si A es invertible, la única solución de $Ax = b$ tiene entradas de la forma
$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}.$$
   Pista: $\det I_i(x) = x_i$.

4. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ una base ordenada para un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$.
   (a) (10 puntos) Demuestre que el mapeo de coordenadas $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es una transformación lineal $V \to \mathbb{R}^n$.
   (b) (10 puntos) Explique por qué el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de una combinación lineal de $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_p} \in V$ es la misma combinación lineal de los correspondientes vectores de coordenadas $\{[\mathbf{u_i}]_{\mathcal{B}} : i = 1, ..., n\}$

5. Sea
$$T : C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$
   (a) (10 puntos) Demuestre que T es lineal
   (b) (10 puntos) Encuentre el núcleo y la imagen de T

6. (20 puntos) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, con producto interno, y de dimensión n. Sea T un operador lineal en V. Demuestre que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de V y su imagen bajo T es otra base ortonormal de V, entonces $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

Notación y definiciones. $M_m(\mathbb{K})$ es el espacio de matrices de $m \times m$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Dada una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_i : i = 1, ..., n\}$ de un espacio vectorial V y un vector $\mathbf{x} \in V$, las $\mathcal{B}$-coordenadas de x son los pesos c_1,...., c_n tales que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_n\mathbf{b}_n$. $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es el espacio de funciones contínuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.