Posgrado en Ciencias Matemáticas

Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral- Semestre 2020-I

- **El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.**
- **Cada pregunta vale dos puntos y el resultado final será la suma de los puntos obtenidos.**
- **No ponga más de un problema por hoja.**
- **Responda las preguntas justificando su respuesta.**

1. Sea C_1 el círculo dado por la ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y C_2 un círculo que se contrae con centro en el origen y radio r. Sean $P = (0, r)$, Q el punto superior de intersección de los dos círculos, y R el punto de intersección de la recta PQ con el eje x (ver Figura 1). ¿Hacia qué valor se aproxima R al contraerse C_2, esto es, cuando el radio $r \to 0$?

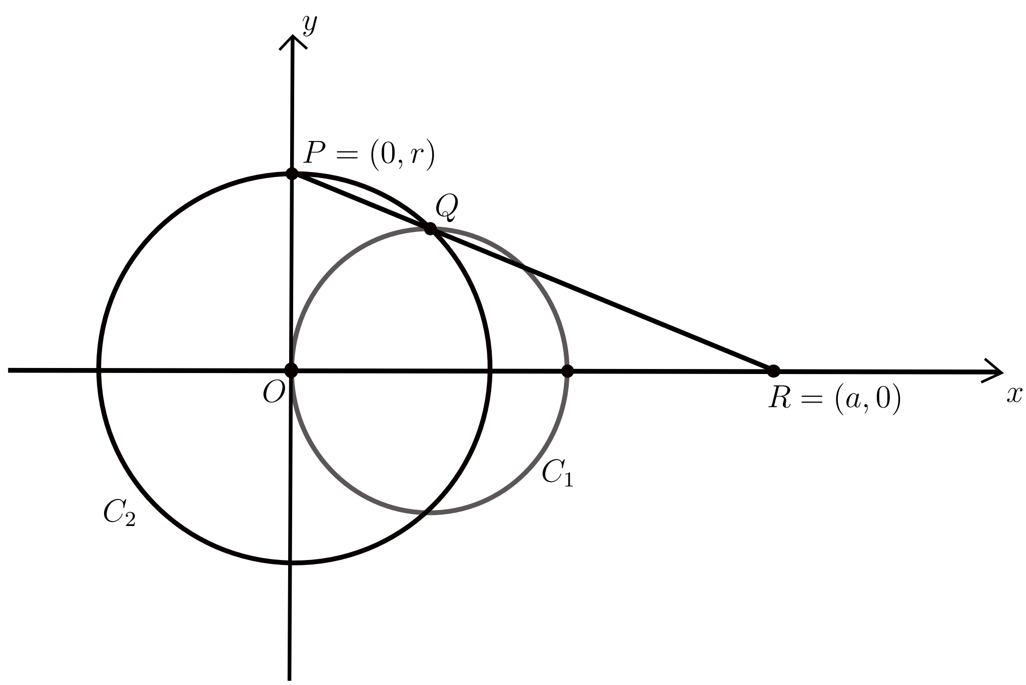

Figura 1

2. Encuentre los puntos sobre la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ más próximos al punto $(2, 0)$.

3. Demuestre que
a) $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.
b) Deduzca que $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ para $x \geq 0$
c) Use inducción matemática para demostrar que para $x \geq 0$ y cualquier entero positivo n

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!}.$$

4. Si la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, demuestre que la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(a_n)$ converge.

5. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra en la Figura 2.
a) ¿En qué valores de x se tienen los máximos y mínimos locales de g?
b) ¿En qué intervalos g es cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba?
c) Dibuje la gráfica de g.

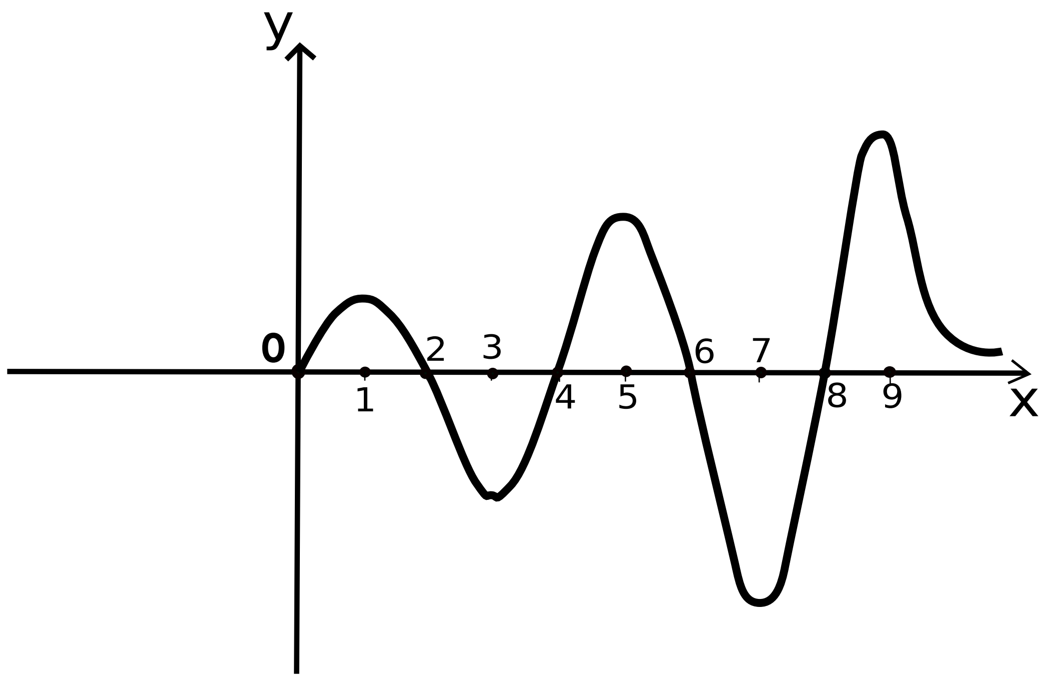

Figura 2