

# Posgrado en Ciencias Matemáticas

## Examen de Admisión - Cálculo Diferencial e Integral- Semestre 2022-2

- El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos.
- Numere las hojas y escriba las respuestas en hojas separadas.
- Responda las preguntas justificando su respuesta.
- Poner sus apellidos en la primera hoja en el borde superior.
- Escanee las hojas de respuestas en un solo documento tipo pdf y
- Al archivo generado nómbrelo con primer y segundo apellidos (**ejemplo** diazlopez.pdf)

1. Conteste lo que a continuación se pide:

(a) Muestre que para todo natural  $n$  se satisface  $0 < \frac{n}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

(b) Calcule el límite:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n}$ .

(c) Verifique si es o no convergente la siguiente serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{100}}$ .

2. Considere las siguientes curvas en el plano euclideo:

- $A = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ .
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 2x - 1 = 0\}$ .
- $C_k = \{(x, y) : y = (x - 1)^{2k-1}, k \in \mathbb{N}\}$ .

(a) Grafique las curvas.

(b) Marque en la figura la región acotada del conjunto  $\mathcal{R}_k = \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B \cup C_k)$ .

(c) Calcule el área  $\mathcal{A}_k$  de la región  $\mathcal{R}_k$ .

(d) Calcule el límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}_k$

3. En el espacio 3-dimensional un meteorito describe una trayectoria parametrizada respecto al tiempo  $M(t), t \in \mathbb{R}$ ,  $M(t) = (t^2, 1/t^2, (t - 1)^3)$ . Un satélite localizado en el punto  $S = (2, 2, 3)$  esta monitoreando en tiempo real la posición del meteorito. Calcule la distancia mínima entre el meteorito y el satélite de observación.

4. Calcule el rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en la elipse cuya ecuación es  $9x^2 + 8y^2 - 72 = 0$ .

5. Si

$$F(x) = \int_{1-x^2}^{1+x^2} \frac{\cos 2t}{1+t^2} dt, \quad 0 \leq x < 10,$$

determine  $F'(x)$ .

6. Sean  $f(x), g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Demuestre que el producto  $fg$  es una función cóncava hacia arriba.

(b) ¿Bajo que condiciones la función compuesta  $h(x) = f(g(x))$  es cóncava hacia arriba?