Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión Álgebra Lineal,
Octubre, 2021

ID (e.g. Herrera Valdez)

Entregue una sección de respuestas ***limpia, borrones o correcciones, separando las respuestas a cada pregunta***; adjunte en una sección separada su trabajo en borrador después de la sección de respuestas. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. En la esquina superior derecha de cada página, escriba sus dos apellidos (e.g. HerreraValdez). Favor de no escribir en la tabla de la derecha. Entregue su examen ***en un solo archivo pdf*** cuyo nombre comience como en sus hojas de examen (e.g. HerreraValdez_algebra.pdf). Los examenes que no cumplan con las instrucciones no serán calificados. Entregue su examen antes a tiempo, de lo contrario no será calificado.

Problema	Max	Puntos
1	50	
2	30	
3	20	
4	20	
5	40	
6	20	
Total:	180	

Preguntas

1. *Espacios vectoriales y funciones.*
   (a) (30 puntos) Sean $\mathbb{F}, S$ dos campos y $\mathbb{F}^S = \{f : S \to \mathbb{F}$ tal que f es una función$\}$. Defina una operación binaria $\mathbb{F}^S \times \mathbb{F}^S \to \mathbb{F}^S$ y una operación con escalares $\mathbb{F} \times \mathbb{F}^S \to \mathbb{F}^S$ de forma que $\mathbb{F}^S$ sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Explique cuáles son el neutro y el inverso aditivo de $\mathbb{F}^S$.
   (b) (20 puntos) *Funciones y subespacios.* Una función f de U a V es un subconjunto de $U \times V$ tal que para cada $u \in U$, existe un sólo $(u, v) \in f$. Pruebe que una función f de U a V es lineal sí y solo sí F es un subespacio de $U \times V$.

2. *Operadores lineales*
   (a) (10 puntos) Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Suponga que $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_m\}$ es un subconjunto del rango de T y que existen funcionales $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ tales que $Tv = \alpha_1(v)w_1 + ... + \alpha_n(v)w_n$ para cada $v \in V$. ¿Es $\mathcal{B}$ una base de W? Demuestre o dé un contraejemplo.
   (b) (10 puntos) Demuestre que si $\beta \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ y $u \in U$ es tal que $\beta(u) \neq 0$, entonces $V = \mathfrak{Nul}(\beta) \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$.
   (c) (10 puntos) Demuestre que para todo par de funcionales lineales $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ con el mismo espacio nulo, existe una constante $f \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha = f\beta$.

3. *Sumas y sumas directas.*
   (a) (10 puntos) Suponga que U, V son subespacios de W, y defina $L : U \times V \to U + V : (u, v) \mapsto u + v$. Demuestre que $U + V$ es una suma directa sí y solo sí L es inyectiva.
   (b) (10 puntos) Pruebe que $U + V$ es una suma directa sí y solo sí $\dim(U + V) = \dim U + \dim V$.

4. *Valores y vectores propios.*
   (a) (10 puntos) Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes: (a) λ es valor propio de T; (b) $T - \lambda I$ no es inyectiva, (c) $T - \lambda I$ no es suprayectiva, (d) $T - \lambda I$ no es invertible.
   (b) (10 puntos) Sea p un número primo. Suponga que R es un espacio vectorial $p-1$-dimensional sobre $\mathbb{Z}_p$. ¿Cuántos valores propios distintos puede tener $T \in \mathcal{L}(R, R)$? Explique su respuesta.

5. *Polinomios.* Sea $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ el conjunto de *polinomios* de grado no mayor que $m \in \mathbb{Z}^+$ con coeficientes en $\mathbb{F}$.
   (a) (10 puntos) ¿Es $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ espacio vectorial sobre F para cualquier $n \in \mathbb{N}$? Argumente de forma concisa.
   (b) (10 puntos) Si $0 < k < n$, ¿es $\mathcal{P}_k(\mathbb{F})$ un subespacio de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$?
   (c) (10 puntos) ¿De qué dimensión es $\left\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} p = 0\right\}$? ¿Es un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$?
   (d) (10 puntos) Cierto o falso: Existe un conjunto de l polinomios que genera $\mathcal{P}_l(\mathbb{Q})$. Justifique su respuesta formalmente.

6. *Productos internos, normas.*
   (a) (10 puntos) Demuestre que la proyección ortogonal P_U es positiva para cualquier subespacio $U \subset V$ de dimensión finita.
   (b) (10 puntos) Pruebe que si $T \in \mathcal{L}(V, V)$ es auto-adjunto y $b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $b^2 < 4c$, entonces $T^2 + bT + cI$ es un operador positivo. *Pista: Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwartz*.

Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión Álgebra Lineal,
Octubre, 2021

ID (e.g. Herrera Valdez)

Notación y definiciones. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. $\mathbb{F}$ representa un campo de números, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ representan a los campos real y complejo, respectivamente. U, V, W representan espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. B^n es el *producto cartesiano* de n copias del conjunto B. $\mathcal{L}(V, W)$ representa los mapeos lineales de V en W. El subespacio nulo de V asociado a $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es $\mathfrak{Nul}(T) = \{v \in V : Tv = 0\}$. Una funcional lineal de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$ es un operador lineal de V en $\mathbb{F}$, es decir, un elemento de $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$. Si U es subespacio de V (dimensión finita), para toda $v \in V$ existen $u \in U$ y $w \in U^\perp$ tales que $v = u + w$. La proyección ortogonal $P_U \in \mathcal{L}(V, V)$ mapea $v \mapsto u$. Un operador es $T \in \mathcal{L}(V, V)$ es positivo si para toda $v, w \in V$, $\langle Tv, v\rangle \geq 0$ y $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$ (T es auto-adjunto).