Examen General de Finanzas Matemáticas

Fecha, 2020
Duración: 10:00-14:00 hrs

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto.

1. Consideremos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \{\mathcal{F}_n\}_{0\leq n\leq N}, P)$, $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, un activo sin riesgo $\{S_n^0\}_{0\leq n\leq N}$ y uno con riesgo $\{S_n\}_{0\leq n\leq N}$, $\mathcal{F}_n$-adaptados. Dar la definición de una estrategia autofinanciable y una expresión para el valor del portafolio de un inversionista que sigue esta estrategia. Demostrar que si los precios actualizados son martingala, el valor del portafolio actualizado es martingala.

2. Consideremos el Modelo de Cox-Ross y Rubinstein, es decir, un activo sin riesgo S_n^0 y uno con riesgo S_n, $0 \leq n \leq N$, tales que

$$\begin{aligned} S_0^0 &= 1, \quad S_n^0 = (1+r)^n, \quad n \geq 1 \\ S_0 &= s, \quad S_n = S_{n-1}T_n, \end{aligned}$$

donde r es determinista y las v.a. T_n valen u o d con probabilidad $1/2$, donde $0 < d < u$, y C_i, $i = 1, ..., N$ es un proceso adaptado tal que para cada $i = 1, ..., N$, C_i, representa el pay-off de una opción europea con fecha de expiración i. Se sabe que el valor al tiempo n del pay-off C_k al tiempo de expiración k, donde $n \leq k$, está dado por

$$E^*\left[\frac{C_k}{(1+r)^{k-n}}|\mathcal{F}_n\right].$$

Supongamos que un emisor vende un contrato constituido por todas estas opciones europeas con pay-off C_i y fecha de expiración i, $i = 1, ..., N$. Demostrar que para cada $n \in \{1, ..., N\}$ el precio del derivado que paga $C_n, ..., C_N$ en los tiempos $n, ..., N$ está dado por:

$$\begin{aligned} V_n &= E^*\left[\sum_{k=n}^{N}\frac{C_k}{(1+r)^{k-n}}|\mathcal{F}_n\right], \quad n = 0, ..., N, \\ &= C_n + E^*\left[\sum_{k=n+1}^{N}\frac{C_k}{(1+r)^{k-n}}|\mathcal{F}_n\right], \quad n = 0, ..., N-1. \end{aligned}$$

Teoría del Riesgo.

3. Sea $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función de utilidad estrictamente creciente. El principio de utilidad cero establece que la prima que debe cobrarse para cubrir un riesgo X es la única solución $\Pi(X)$ de la ecuación
$$E[v(\Pi(X) - X)] = v(0).$$
Demostrar que
    a) la prima $\Pi(X)$ es la misma para todas las funciones de utilidad de la forma $av(x) + b$ con $a > 0$ y b arbitraria, ambas constantes.
    b) $\Pi(X) \geq E(X)$.
    c) si $X = c$ constante, entonces $\Pi(X) = c$.
    d) $\Pi(X) = (1/a) \ln E(e^{aX})$ cuando $v(x) = (1/a)(1 - e^{-ax})$, con $a > 0$ constante y suponiendo que $E(e^{aX})$ es finita.
    e) si $X \leq Y$ casí seguramente, entonces $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$.
4. Definir el proceso del modelo de Cramér-Lundberg $(C_t)_t$ y hallar la esperanza, la varianza y la transformada de Laplace de C_t, para $t \geq 0$, en función de sus parámetros.

Finanzas a tiempo continuo.

5. Supongamos que el precio de una opción está dado por una función conocida del precio de un subyacente, el cual sigue el modelo de Black-Scholes:
$$P_t = u(t, S_t).$$
Escribir P mediante una ecuación diferencial estocástica. Deducir su volatilidad.
6. Consideremos el modelo CIR para la tasa spot
$$dr_t = a(b - r_t)dt + \gamma\sqrt{r_t}dW_t.$$
Integrando esta EDE y considerando que la integral estocástica tiene esperanza nula, establecer la EDO satisfecha por $\mathbb{E}[r_t]$. Resolver esta ecuación.