Examen General de Finanzas Matemáticas

17 de enero 2021
Duración: 11:00-15:00 hrs

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto.

1. Consideremos un mercado con un único activo con precio π^1 y tasa libre de riesgo r. Supongamos que $\pi^1 > r$ y la distribución de S^1 tiene una densidad estrictamente positiva $f : (0, \infty) \to R_+$. Encontrar una medida martingala P^*.

2. Consideramos un modelo en tiempo discreto de un único periodo con σ-algebra inicial generada por conjuntos nulos. Denotemos genericamente mediante $\bar{\xi}$ una estrategia de inversión. Sea π un vector de precios. Demostrar que en un mercado libre de arbitraje y no redundante el conjunto

$$\{\bar{\xi} \mid \bar{\pi} \cdot \bar{\xi} = w\},$$

es un conjunto compacto para toda $w > 0$.

Teoría del Riesgo.

3. Consideramos un modelo de riesgo colectivo

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

junto con las hipótesis usuales para las variables aleatorias N y $Y_1, Y_2, \ldots$
a) Calcular la función generadora de momentos de S en función de las de N y Y.
b) Deducir de lo anterior la esperanza y la varianza de S.
c) Encontrar la distribución de S cuando $N \sim Poi(\lambda)$ y $Y \sim Ber(p)$.

4. Una aseguradora encuentra que en cierto grupo de conductores asegurados, la tasa de accidentes en cada periodo de 24 horas aumenta de la media noche a medio día y posteriormente disminuye hasta la siguiente media noche.La aseguradora decide que el número de accidentes puede ser modelado por un proceso Poisson no homógenio cuya intensidad al tiempo t está dada por $1/6 - (12 - t)^2/1152$, en donde t es el número de horas transcurridas a partir de la media noche.
a) Encontrar el número esperado de accidentes diarios.
b) Hallar la probabilidad de que haya exactamente un accidente entre las 6 a.m. y 6 p.m..

Finanzas a tiempo continuo.

5. Denotamos por $C(S,t;E)$ el precio al tiempo t de una opción de compra con subyacente S y con precio de ejercicio E. Consideramos una opción con fecha de expiración T y cuyo valor al tiempo t se denota $V(S,t)$. Es posible sintetizar la opción utilizando opciones de compra con la misma fecha T. Encontrar la función de densidad del número de opciones de compra para sintetizar la opción.

6. Sea B un movimiento browniano y $f : [0,1] \to R$ una función convexa tal que $f(0) = 0$ y $\int_0^1 f'(s)^2 ds < \infty$. Demostrar, gracias al teorema de Girsanov, que

$$P(\sup_{s\leq 1} |B_s + f(s)| \leq x) \leq e^{x[|f'(1)|+\int_0^1 f''(s)ds] - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(s)^2 ds} P(\sup_{s\leq 1} |B_s| \leq x).$$