Examen General
Fundamentos de Combinatoria
Semestre 2023-2

Duración: 4 horas. De los 8 ejercicios siguientes, escoger 6 para resolver (si se entregan más de 6 ejercicios, se calificará sobre los 6 ejercicios de menor puntaje).

1.- Utiliza el principio de Inclusión-Exclusión para probar que

$$\sum(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^n = n!$$

2.- Muestra que

i) $\binom{k}{l}\binom{n}{k} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$

ii) $\sum\limits_{k=-m}^{n} \binom{m+k}{r}\binom{n-k}{s} = \binom{n+m+1}{r+s+1}$

iii) $\sum\limits_{k} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

3.- Sea $S(n,k)$ el número de particiones de $\{1,\ldots,n\}$ en k partes no vacías (el número de Stirling de segundo tipo).

i) Prueba directamente que $S(n,1)=1$, $S(n,2)=2^{n-1}-1$, y $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$.

ii) Da una fórmula para $S(n,n-2)$

4.- Muestra que en un plano proyectivo finito, el número de líneas que contienen a cada punto es igual al número de puntos en cada línea.

5.- Resuelve las siguientes recurrencias.

i) Sea $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 1$ para $n \geq 2$, $a_0 = 2$ y $a_1 = 4$.

ii) Sea $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - n + 6$ para $n \geq 2$ y $a_0 = a_1 = 1$.

6.-

i) Sea $\mathcal{F}$ una familia intersecante de subconjuntos de $\{1,\ldots,n\}$. Muestra que $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$, y da un ejemplo donde $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

ii) Sea $\mathcal{B}$ una familia de m-subconjuntos de un n-conjunto A, tal que cualquier l-subconjunto de A está contenido en a lo más un elemento de $\mathcal{B}$. Muestra que

$$|\mathcal{B}| \leq \frac{\binom{n}{l}}{\binom{m}{l}}$$

7.- Sea $\mathcal{P}$ un orden parcial cuya cadena más larga tiene tamaño r. Muestra que $\mathcal{P}$ puede particionarse en r anti-cadenas.

8.- Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto finito C. Muestra que el número de órbitas de C bajo la acción de G es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\psi(\pi),$$

donde $\psi(\pi)$ es el número de elementos de C que quedan fijos bajo la acción de π.