Examen General de Geometría Algebraica - 2020-1

Miércoles 15 de enero de 2020

El examen dura **4 horas.** Escoge 5 de los 6 ejercicios siguientes; cada uno de los 5 ejercicios escogidos puntuará 2 puntos; la calificación mínima para aprobar el examen será de 6 puntos.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

1. Sea $\mathbb{Y} \subset \mathbb{A}^3$ el conjunto $\{(t^2, t^3, t^5) \mid t \in K\}$.
   (a) Demuestra que $\mathbb{Y}$ es un conjunto afín de dimensión uno.
   (b) Encuentra un conjunto de generadores del ideal $I(\mathbb{Y})$ (el ideal de polinomios que se anulan en $\mathbb{Y}$).
   (c) ¿Es el anillo de coordenadas de $\mathbb{Y}$ ($A(\mathbb{Y}) := \frac{K[x,y,z]}{I(\mathbb{Y})}$) isomorfo al anillo de polinomios en una variable? Razona tu respuesta.
   (d) ¿Es el origen un punto singular o regular de $\mathbb{Y}$?
   (e) Calcular el espacio tangente de Zariski de $\mathbb{Y}$ en el origen.

2. Sea $\mathbb{X}$ una variedad (irreducible) proyectiva de dimensión d en $\mathbb{P}^n$ y sea $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano.

   Demostrar que se cumple uno de los dos enunciados siguientes:

   - $\mathbb{X}$ está contenida en H
   - Cada componente irreducible de $\mathbb{X} \cap H$ tiene dimensión $r - 1$.

   Dar un ejemplo que muestre que la hipótesis de irreducibilidad de $\mathbb{X}$ es necesaria para que se cumpla el enunciado anterior.

3. Sea $\mathbb{W}$ el conjunto de ceros comunes en $\mathbb{A}^3$ de los polinomios $P := xy - z$ y $Q := yz - x^4$.
   (a) Descomponer $\mathbb{W}$ en componentes irreducibles.
   (b) Demostrar que una de las componentes de $\mathbb{W}$ es isomorfa a la curva $\mathbb{Y}$ del ejercicio 1.

4. Demuestra que la imagen del mapeo de Veronese es un isomorfismo sobre su imagen.

5. Sean $\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{X}_2$ dos variedades (irreducibles) y sean $p \in \mathbb{X}_1$ y $q \in \mathbb{X}_2$ puntos.

   Demostrar que si los anillos locales de $\mathbb{X}_1$ en p y de $\mathbb{X}_2$ en q son isomorfos como K-álgebras, entonces existen abiertos $U_1 \subset \mathbb{X}_1$ y $U_2 \subset \mathbb{X}_2$ con U_1 y U_2 isomorfos.

6. Considera las curvas en $\mathbb{A}^2$ dadas por

   a) $Z(x) \subset \mathbb{A}^2$, *b*) $Z(x^2 - y^3) \subset \mathbb{A}^2$, *c*) $Z(xy) \subset \mathbb{A}^2$,

   d) $\mathbb{Y}$ del ejercicio 1, *e*) $\mathbb{W}$ del ejercicio 3.

   ¿Cuáles de ellas son isomorfas? ¿Cuáles de ellas son birracionalmente equivalentes? Razona tu respuesta.