Examen General de Geometría Algebraica
2020-2
Viernes 31 de julio de 2020

El examen dura **4 horas**. Resuelve los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios puntuará 2 puntos; la calificación mínima para aprobar el examen será de 6 puntos.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo K algebraicamente cerrado de característica 0.

1. Sea $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio no nulo, libre de cuadrados, dado por

$$f(x_0, x_1, x_2) =$$

$$a_{0,0}\, {x_0}^2 + a_{1,1}\, {x_1}^2 + a_{2,2}\, {x_2}^2 + a_{1,2}\, x_1\, x_2 + a_{0,2}\, x_0\, x_2 + a_{0,1}\, x_0\, x_1$$

Sea $X = V(f) \subset \mathbf{P}^2_K$ el correspondiente conjunto algebraico.

   a) Probar que X es irreducible si y solo si

$$0 \neq 4a_{0,0}\, a_{1,1}\, a_{2,2} - {a_{0,1}}^2\, a_{2,2} - a_{0,0}\, {a_{1,2}}^2 + a_{0,1}\, a_{0,2}\, a_{1,2} - {a_{0,2}}^2\, a_{1,1}\,.$$

   b) Si X es irreducible entonces es no singular.

2. Sean $H_1, \ldots, H_m \subset \mathbb{P}^n$ hipersuperficies. Pruebe que $\mathbb{P}^n \backslash (H_1 \cup H_2 \cdots \cup H_m)$ es afín.

3. Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ un subconjuto cerrado de dimensión 0. Probar que si $n \geq 2$ entonces $\mathbb{A}^n \backslash X$ no es afín.

4. Sea $C = Z(f) \subset \mathbb{A}^2$ irreducible tal que f es un polinomio de grado 3. Probar que C no puede tener 2 puntos singulares.

5. Sea $\phi : X \to Y$ una función regular entre variedades afines y sea $\Gamma_\phi := \{(a, b) \in X \times Y : b = \phi(a)\}$ la gráfica de ϕ.

   a) Demuestra que Γ_ϕ es variedad afin.

   b) Prueba que la apicación $\psi : X \to \Gamma_\phi,\ \psi(x) = (x, \phi(x))$ es un isomorfismo de variedades afines.

   c) ¿Es el inciso b) cierto para variedades cuasi-afines?