# Examen General de Geometría Algebraica
# 2020-2/2

11 de septiembre de 2020

El examen dura **4 horas.** Resuelve 4 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0. El espacio afín será denotado por $\mathbb{A}$.

1. Determinar, en función del valor de $n$, cuáles de los siguientes espacios son variedades afines, proyectivas, casiafines o casiproyectivas. Razona tu respuesta.
   (a) El espacio $\mathbb{A}^n$
   (b) El espacio $\mathbb{X}_n \subset \mathbb{A}^n$ consistente en la unión de los hiperplanos coordenados $H_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n; x_i = 0\}$ desde $i = 1$ hasta $n$.
   (c) El espacio $\mathbb{Y}_n \subset \mathbb{A}^n$ consistente en todos los puntos de $\mathbb{A}^n$ menos el origen de coordenadas.
   (d) El espacio $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Y}_n \cap \mathbb{X}_n$.

   Determinar si existe algún $n$ para el cual el anillo de funciones regulares en $\mathbb{A}^n$ sea isomorfo al anillo de funciones regulares en $\mathbb{Y}_n$. Lo mismo para $\mathbb{X}_n$ y $\mathbb{Z}_n$.
2. Determinar cuáles de los siguientes morfismos son regulares, racionales, biregulares o birracionales. Razona tu respuesta.
   (a) El mapeo de $\mathbb{A}^1$ en $\mathbb{A}^2$ dado por $t \mapsto (t^2, t^3)$
   (b) El mapeo de $\mathbb{A}^1$ en $\mathbb{A}^2$ dado por $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$
   (c) El mapeo de $\mathbb{A}^2$ en $\mathbb{A}^2$ dado por $(x, y) \mapsto (x, xy)$
   (d) El mapeo de $\mathbb{A}^3$ en $\mathbb{A}^3$ dado por $(x, y, z) \mapsto (x, xy, xyz)$
   (e) El mapeo de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^2$ dado por $[x, y, z] \mapsto [yz, zx, yz]$

   Mostrar que la imagen del morfismo 2a es el conjunto de ceros de la función $y^2 - x^3$. Determinar si este morfismo es biregular o birracional sobre su imagen.
3. Sea $\mathcal{I}$ el ideal de $K[x, y, z]$ generado por $\{x(x^2 - y^3), xz, y(x^2 - y^3), yz\}$ y sea $\mathbb{W}$ el conjunto de ceros de $\mathcal{I}$ en $\mathbb{A}^3$. Calcúlese
   (a) La dimensión de $\mathbb{W}$
   (b) La descomposición de $\mathbb{W}$ en componentes irreducibles
   (c) El espacio tangente de Zariski de $\mathbb{W}$ y de cada una de sus componentes irreducibles en el origen de $\mathbb{A}^3$

4. Probar que la imagen del mapeo de Veronese $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$ es la clausura proyectiva de la imagen del morfismo $\gamma : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^d$ definido por $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$.
5. Sea $\mathbb{X}$ una variedad algebraica (irreducible) y sea $P$ un punto de $\mathbb{X}$. Demostrar que existe una correspondencia biyectiva entre ideales primos del anillo local $\mathcal{O}_P$ y subvariedades cerradas de $\mathbb{X}$ que contienen a $P$.