Examen General de Geometría Algebraica 2021-1

El examen dura 4 horas. Resuelve 5 de los 6 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades están definidas sobre un campo K algebraicamente cerrado de característica 0.

1. Sea X el conjunto algebraico de $\mathbb{A}^3$ definido por los polinomios $xz - y$ y $x^2 - yz$. Descomponer X en componentes irreducibles y encontrar los ideales primos que las definen.
2. Sean $f_1, f_2 \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dos polinomios linealmente independientes sobre K. Considere el conjunto de ceros $Z(f_1, f_2) \subset \mathbb{A}^n$. Probar que si $Z(f_1, f_2)$ tiene codimensión 1 en $\mathbb{A}^n$ entonces f_1 no es irreducible ó f_2 no es irreducible.
3. Sean $X \subset \mathbb{A}^m, Y \subset \mathbb{A}^n$ variedades afines (irreducibles). Sean $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ y $g_1, g_2 \ldots, g_r \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tales que los ideales de definición de X e Y estan dados por $I(X) =< f >$, $I(Y) =< g_1, g_2, \ldots, g_r >$.

    a) Dados $h_1, h_2, \ldots, h_n \in K[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ considere el morfismo $\phi : \mathbb{A}^m \mapsto \mathbb{A}^n$ dado por $\phi(p) = (h_1(p), h_2(p), \ldots, h_n(p))$. Probar que ϕ se restringe a un morfismo $\hat{\phi} : X \mapsto Y$ si y solo si existen polinomios $q_1, q_2 \ldots, q_r \in K[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ tales que $g_i(h_1, h_2, \ldots, h_n) = q_i f$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

    b) En la parte anterior asumir que $r = 1$ y probar que para todo punto p no singular de $X \cap D(q_1)$ se tiene que $\hat{\phi}(p)$ es un punto no singular de Y donde $D(q_1) = \mathbb{A}^n \setminus Z(q_1)$.
4. *a*) Probar que $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n$ y $\mathbb{A}^{n+1}$ son birracionalmente equivalentes.

    b) Sea $X \subset \mathbb{A}^m$ una hipersuperficie. Pruebe que $X \times \mathbb{A}^n$ es isomorfa a una hipersuperficie de $\mathbb{A}^{m+n}$ y que X es no singular si y solo si $X \times \mathbb{A}^n$ es no singular.
5. *a*) Verificar que la curva $X = Z(y^4 - (x-1)(x-2)) \subset \mathbb{A}^2$ es no singular pero que su cerradura proyectiva $\bar{X} \subset \mathbb{P}^2$ es singular en ∞.

    b) Determinar si la explosión $\tilde{\bar{X}}$ de $\bar{X}$ con centro en ∞ es singular o ya no es singular.
6. *a*) Considerar $\mathbb{P}^9_k$ como el espacio que parametriza a las cuádricas en $\mathbb{P}^3_k$. Mostrar que existe una hipersuperficie $\Delta \subset \mathbb{P}^9_k$ de grado 4 que parametriza a las cuádricas singulares.

b) Consideremos una cúbica alabeada $C \subset \mathbb{P}^3_k$ (por ejemplo $C = \{[x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3] \mid [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1\}$) y su ideal $I_C = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Si denotamos

$$W = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_k \mid xQ_1 + yQ_2 + zQ_3\},$$

entonces escribir la ecuación de la curva $D \subset W$ cuyos puntos parametrizan las cuádricas singulares que contienen a C; es decir, escribir la ecuación de $D = \Delta \cap W$. ¿Es D singular?