Examen General de Geometría Diferencial - 2020-1

Miércoles 15 de enero de 2020

El examen dura **4 horas.** Para aprobar el examen, dar **soluciones completas** a por lo menos 3 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

Ejercicio 1. Consideremos, para todo $r > 0$, la aplicación $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_r(t) = t \text{ si } t \leq 0 \quad \text{y} \quad \varphi_r(t) = rt \text{ si } t \geq 0.$$

Muestre que los atlas $(\varphi_r)_{r>0}$ definen una familia no numerable de estructuras diferenciables sobre $\mathbb{R}$. ¿Son difeomorfas las variedades diferenciables correspondientes?

Ejercicio 2. Consideremos una aplicación diferenciable $\pi : M \to N$. Muestre que π es una sumersión si y sólo si admite secciones locales en cada punto, es decir, para todo $q_0 = \pi(p_0)$, $p_0 \in M$, existe una vecindad abierta V de q_0 en N, y una aplicación diferenciable $\sigma : V \to M$ tales que
1) $\sigma(q_0) = p_0$;
2) $\pi \circ \sigma = id_V$.

Ejercicio 3. Considere la cuádrica proyectiva

$$Q = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in P^3\mathbb{R} : \; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0\}$$

y muestre lo siguiente:
a) Q es una subvariedad de $P^3\mathbb{R}$;
b) para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, el punto

$$P(u, v) = [\cos(\pi u), \operatorname{sen}(\pi u), \cos(\pi(u + 2v)), \operatorname{sen}(\pi(u + 2v))]$$

pertenece a Q y sólo depende de las clases de u y v módulo $\mathbb{Z}$;
c) la aplicación $(u, v) \mapsto P(u, v)$ define, al pasar al cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, un encaje del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ en $P^3\mathbb{R}$, de imagen Q.

Ejercicio 4. Una k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ es descomponible si $\omega = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$ para ciertas 1-formas ϕ_i. Muestre que:
a) Si $\dim M \leq 3$, entonces toda 2-forma ω es descomponible.
b) Si ϕ_i, $i = 1, \ldots, 4$ son independientes, entonces $\omega = (\phi_1 \wedge \phi_2) + (\phi_3 \wedge \phi_4)$ no es descomponible. *Indicación:* piensen en $\omega \wedge \omega$.

Ejercicio 5. Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\alpha(t) \in S_1 \cap S_2$ para toda t, donde S_1 y S_2 son dos superficies. Sea V un campo vectorial a lo largo de α que es tangente a S_1 y a S_2.
a) Muestre con un ejemplo que V puede ser paralelo a lo largo de α considerando α como una curva en S_1, sin que V sea paralelo a lo largo de α viendo α como una curva en S_2.
b) Muestre que si S_1 es tangente a S_2 a lo largo de α, es decir $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$ para toda $t \in [a, b]$, entonces V es paralelo a lo largo de α en S_1 si y sólo si V es paralelo a lo largo de α en S_2.
c) Muestre que si S_1 y S_2 son tangentes a lo largo de α, entonces α es geodésica en S_1 si y sólo si α es geodésica en S_2.