Examen General de Geometría Diferencial 2020-2/2

11 de septiembre de 2020

El examen dura **4 horas.** Para aprobar el examen, dar **soluciones completas** a por lo menos 3 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

Ejercicio 1. Sea A una matriz simétrica $n \times n$ con coeficientes reales, definida positiva ($x^T Ax > 0$ si $x \neq 0$). Sea $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Muestre que

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n |\ x^T Ax = b\}$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Muestre que M es difeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Ejercicio 2. Sea γ una curva regular sobre una superficie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ de normal N. Muestre que γ puede ser reparametrizada para ser una geodésica de $\mathcal{S}$ si y solo si

$$\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, N) = 0.$$

Ejercicio 3. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con la métrica con signatura $g = dx^2 + dy^2 - dz^2$, y la pseudoesfera

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

1. Sea $p \in S$. Muestre que todo vector v de $\mathbb{R}^3$ se escribe de manera única como la suma de un vector tangente a S en p y de un vector normal a S en p

$$v = a + b, \quad a \in T_pS, \quad g(b, w) = 0 \ \ \forall\ w \in T_pS.$$

2. Definemos una derivada covariante sobre S como en el caso definido positivo

$$\nabla^S_v X = \text{ la componente de } \partial_v X \text{ tangente a } T_pS.$$

Consideremos $p_0 \in S$, $e \in T_{p_0}S$ un vector unitario ($g(e, e) = 1$) y la curva

$$p(t) := \cosh(t)p_0 + \sinh(t)e.$$

Encontrar dos campos de vectores $E(t)$ y $F(t)$ a lo largo de $p(t)$ tales que el transporte paralelo a lo largo de $p(t)$ esté dado por

$$T_{p_0}S \to T_{p(t)}S, \qquad aE(0) + bF(0) \mapsto aE(t) + bF(t).$$

Ejercicio 4. Consideremos $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{C}^m$ equipados con sus métricas euclidianas estandares

$$g(z, w) = \Re e \sum_{k=1}^{m} z_k \overline{w}_k$$

y sea $\mathbb{T}^m = \{z \in \mathbb{C}^m |\ |z_1| = \ldots = |z_m| = 1\}$ el toro de dimensión m en $\mathbb{C}^m$ con la métrica inducida. Encuentre una inmersión isométrica $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{T}^m$, determine todas las geodésicas de $\mathbb{T}^m$ y pruebe que el toro es plano.

Ejercicio 5. Sea $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ una 1-forma diferencial cerrada sobre una bola centrada en 0 de $\mathbb{R}^n$. Muestre que $\alpha = df$ con

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n)x_j dt.$$