Examen General de Geometría Diferencial 2021-1

El examen dura **4 horas.** Para aprobar el examen, dar **soluciones completas** a por lo menos 3 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^∞ tal que $f \circ f = Id$. Consideremos $Fix(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ f(x) = x\}$.

1. Mostrar que para todo $x \in Fix(f)$, $(d_x f)^2 = Id$.
2. Supongamos que $f(0) = 0$. Definimos $h = \frac{1}{2}(Id + d_0 f \circ f)$. Mostrar que h es un difeomorfismo entre vecindades de 0. Mostrar que $h \circ f = d_0 f \circ h$.
3. Deducir que $Fix(f)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2. Sea M el espacio cociente de $\mathbb{R}^2$ bajo la relación de equivalencia

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

si y sólo si existe $f \in \langle \gamma \rangle$ tal que $(x_2, y_2) = f(x_1, y_1)$ donde

$$\gamma(x, y) = (x + 1, -y)$$

y $\langle \gamma \rangle$ denota al grupo generado por γ. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to M$ la función que a cada punto (x, y) le asocia su clase de equivalencia.

1. Muestra que M es una variedad indicando explícitamente una parametrización local alrededor de $\pi(a, b)$ para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. ¿Puedes identificarla?
2. Muestra que se puede usar π para dotar a M de una métrica Riemanniana con la cual es localmente isométrica a $\mathbb{R}^2$.
3. Encuentra una geodésica cerrada de longitud 1 y muestra que es única.

Ejercicio 3. Sea α la 1-forma $(x, y) \mapsto \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y sea $f : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$.

1. Calcula $d\alpha$.
2. ¿Es $f^*(\alpha)$ una forma cerrada? ¿Es exacta?
3. ¿Es α exacta? *Sigue la indicación:* considera $i^*\alpha$ en donde $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ es la inyección canónica y prueba que si $i^*\alpha$ fuera exacta, entonces tendría que anularse en algún punto de $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 4. Sea g_0 la métrica euclidiana de $\mathbb{R}$. Definimos otra métrica riemanniana g sobre $\mathbb{R}$ por $g_x := e^{-x^2}(g_0)_x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea ∇_0 (resp. ∇) la conexión de Levi-Civita sobre $T\mathbb{R}$ asociada a g_0 (resp. g). Calcula $(\nabla_0)\frac{\partial}{\partial x}$ y $\nabla\frac{\partial}{\partial x}$.

Ejercicio 5. Sean ∇ y $\overline{\nabla}$ dos conexiones en $\mathbb{R}^n$.

1. Mostrar que $B(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ define un tensor.

2. Mostrar que las conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ tienen las mismas geodésicas si y sólo si $B(X,X) = 0$ para todo X.

3. La torsión T asociada a una conexión ∇ se define como

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Mostrar que si dos conexiones tienen las mismas geodésicas y la misma torsión, entonces las conexiones coinciden.